

Il metodo scientifico, la scienza, le scienze

Che cos'è la scienza?

Platone (*Teeteto*)

Prima definizione: “ *scienza è sensazione*”.

Seconda definizione: “*scienza è opinione*”.

Terza definizione: “*scienza è opinione vera accompagnata da spiegazione*”.

manifestare il proprio pensiero per mezzo della voce

dare una descrizione analitica di ciò di cui si sta parlando

indicare la differenza tra un elemento e un altro

Aristotele

Scienza è conoscere per cause

Scienza è sapere per dimostrazione

La dimostrazione si esprime attraverso un sillogismo scientifico che procede da *principi*, da *protasi* vere, immediate, più note, anteriori e causa delle *conclusioni*

I principi sono indispensabili per le conclusioni e, nello stesso tempo, devono essere pertinenti con le conclusioni (che derivano da essi)

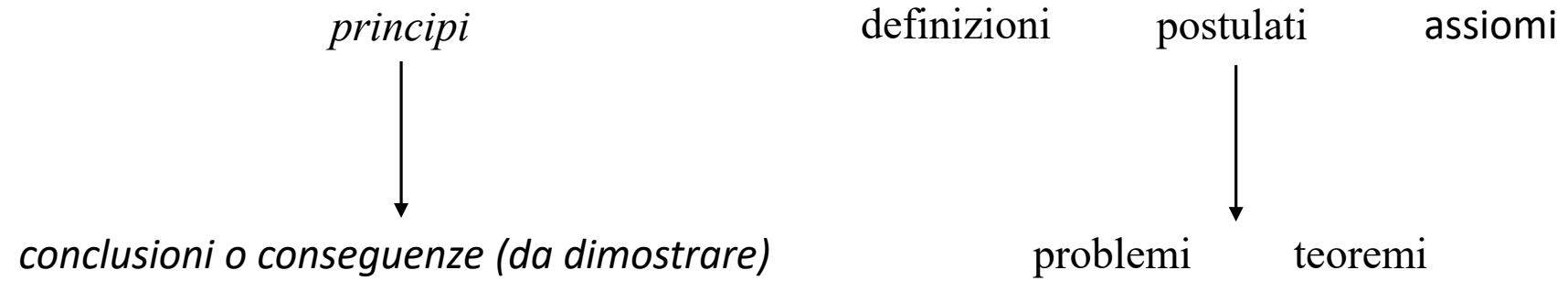
Solo le conclusioni devono essere dimostrate

La *verità* appartiene alla conoscenza scientifica e all'intuizione.

L'intuizione è l'ambito entro cui scegliere i principi.

I principi e le conclusioni sono espressi per mezzo di proposizioni

Struttura epistemologica di una scienza



La geometria elementare

Euclide, il primo libro degli Elementi e sua struttura epistemologica

Nel 331 a.C. Alessandro Magno fondò Alessandria.

Nel 323 morì, i suoi generali si divisero il regno e crearono nuovi centri di cultura

cultura ellenistica

In Egitto regnava Tolomeo I, che creò ad Alessandria il Museo, con al centro la Biblioteca.

Tolomeo I chiamò Euclide a insegnare matematica.

Non abbiamo notizie certe su Euclide. Possiamo dire che è vissuto tra il IV e il III sec. a.C. e che ha svolto la sua attività di insegnante presso il Museo di Alessandria (tra il 300 e il 280 a.C.).

Ad Euclide sono attribuiti diversi scritti. Lo scritto principale ha il titolo: *Elementi*.

Negli *Elementi* Euclide ha raccolto gran parte della matematica prodotta fino a quel momento, ordinandola secondo un preciso schema logico.

Il *Commento al primo libro degli Elementi* di Proclo contiene notizie raccolte sugli *Elementi* in otto secoli (da Euclide (III sec. a.C.) a Proclo (V sec. d.C.)).

Gli *Elementi* sono composti da tredici libri:

I-IV: geometria piana (geometria assoluta e geometria euclidea (I e II), geometria del cerchio (III), poligoni regolari (IV)).

V: teoria delle proporzioni tra grandezze commensurabili.

VI: applicazioni geometriche piane della teoria delle proporzioni (similitudine tra figure piane).

VII-VIII-IX: linee essenziali dell'aritmetica e alcune questioni di teoria dei numeri.

X: teoria di linee rette commensurabili o incommensurabili.

XI: questioni racchiuse dai Greci sotto il termine *Stereometria*.

XII: questioni che riguardano la misura del cerchio, della piramide, del cono e della sfera, trattate con il metodo di esaustione.

XIII: costruzione dei cinque poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro), detti anche "solidi platonici", nella sfera.

La tradizione attribuisce a Euclide altri due libri degli *Elementi*: XIV (di Ipsicle)

XV (di Isidoro di Mileto)

Questioni che riguardano la valutazione e la composizione degli *Elementi*:

questione relativa all'unità di composizione dello scritto,

questione riguardante la struttura “interna” dei diversi libri.

Proclo

Euclide ha scelto “Elementi” come titolo del suo scritto in base ai fatti matematici che presenta e in base ai discenti.

Sono chiamati “*elementi*” quei teoremi che conducono alla conoscenza di altri, “*elementari*” quei teoremi che sono semplici e si applicano in molti altri.

Scegliere gli elementi è un compito difficile perché bisogna preoccuparsi di togliere il superfluo, della chiarezza, della concisione, della comprensione...

Primo libro degli *Elementi* di Euclide

Struttura epistemologia

PRIMI PRINCIPI

(definizioni, postulati, nozioni comuni o assiomi)



CONSEGUENZE

(problemi e teoremi)

Primi principi

Definizioni: permettono di individuare dei termini specifici in relazione ai contenuti che si vogliono presentare.

Forniscono un primo “vocabolario” essenziale dei termini usati in geometria e in aritmetica.

Postulati: proposizioni ritenute “vere” in ragione della loro evidenza basata sull’intuizione.

Nozioni comuni o assiomi: proposizioni ritenute “vere” in ogni ambito delle nostre conoscenze (rapportate al tempo)

Nel contesto euclideo vi è una netta differenza tra *postulati* e *nozioni comuni*.

Conseguenze

Problemi: proposizioni per la cui risoluzione è essenziale la costruzione di figure geometriche (se il problema è geometrico).

Teoremi: proposizioni dimostrate attraverso un'argomentazione (ragionamento) e che hanno per oggetto le proprietà delle figure geometriche (se il teorema è geometrico).

Alcune scelte di Euclide nella presentazione degli *Elementi*

dall'universale verso il particolare

punto \implies segmento \implies superficie piana \implies corpo

nella “sua” visione delle “parallele” non c'è collegamento tra perpendicolarità e parallelismo

la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti

dare maggiore spazio alla geometria rispetto all'aritmetica

Primo libro degli *Elementi*

23 definizioni

5 postulati

5 nozioni comuni o assiomi

48 proposizioni

Alcune definizioni

Def.I,1: “Il *punto* è ciò che non ha parti.”

Def.I,2: “La *linea* è una lunghezza senza larghezza”

Def.I,3: “Gli *estremi di una linea* sono punti”

Def.I,4: “La *linea retta* è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa”.

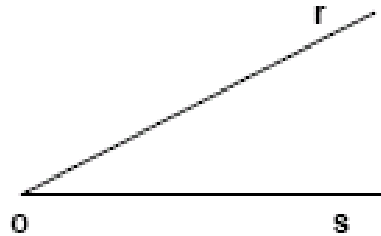
Def.I,5: “La *superficie* è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza”.

Def.I,6: “Gli *estremi di una superficie* sono linee”.

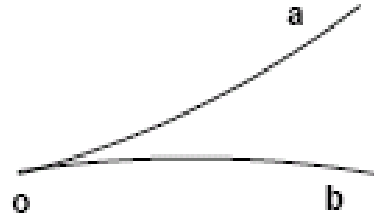
Def.I,7: “Una *superficie piana* è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa”.

Def.I,8: “L’angolo piano è l’inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrano fra loro e non giacciono in linea retta”.

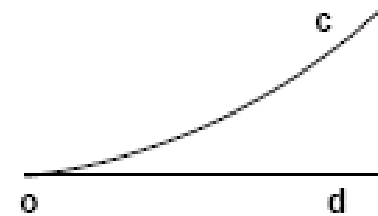
ANGOLO RETTILINEO



ANGOLO CURVILINEO



ANGOLO MISTILINEO



Def.I,10: “Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella sui cui è innalzata”.

Def.I,14: “Figura è ciò che è compreso da uno o più termini”.

Def.I,15: “Cerchio è una figura piana compresa da un’unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadono sulla [stessa] linea, [cioè sulla circonferenza del cerchio], a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro”.

Def.I,23: “Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti”.

Postulati

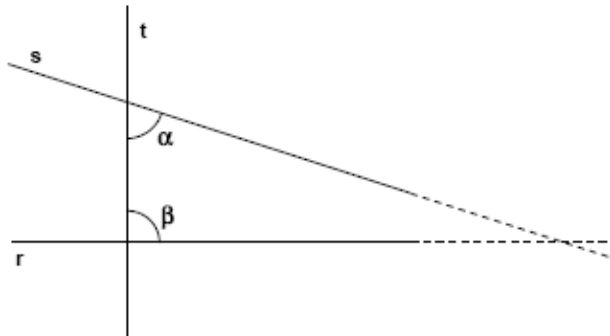
Postulato primo: “Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto”.

Postulato secondo: “E che una retta terminata si possa prolungare continuamente (=secondo il continuo) in linea retta”.

Postulato terzo: “E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza”.

Postulato quarto: “E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro”.

Postulato quinto: “E che, se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), allora le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti)”.



Alcune nozioni comuni (o assiomi)

I: Cose che sono uguali a una stessa sono uguali anche fra loro.

II: E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

III: E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

VII: E cose che coincidono fra loro sono uguali fra loro.

VIII: E il tutto è maggiore della parte.

Proposizioni

Consideriamo una proposizione e indichiamo con A le ipotesi o i dati e con B la tesi o ciò che è richiesto:

$$A \Rightarrow B \text{ (} A \text{ implica } B \text{)}$$

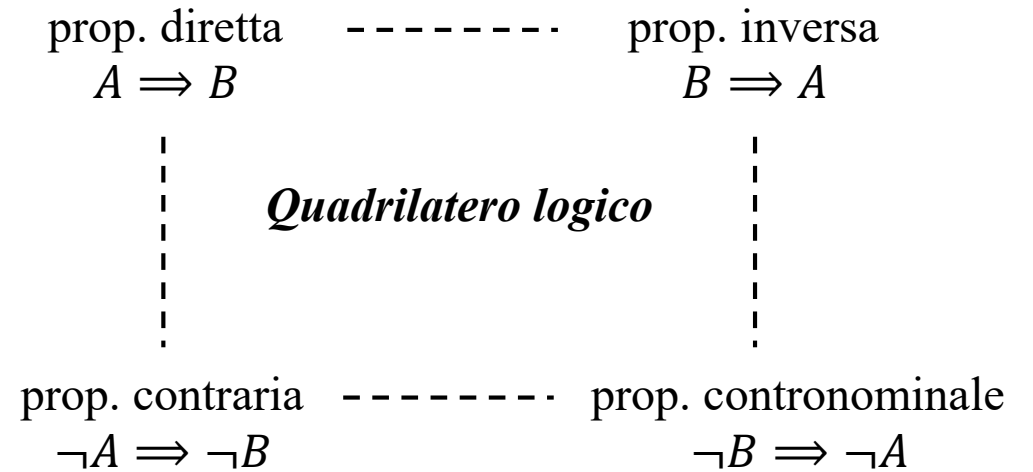
A partire da una *proposizione diretta* possiamo costruirne altre:

Proposizione inversa: $B \Rightarrow A$

Proposizione contraria: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Proposizione inversa della contraria: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Proposizione contraria dell'inversa: $\neg B \Rightarrow \neg A$



Proposizioni

dimostrazione diretta

dimostrazione per sovrapposizione

dimostrazione per assurdo

dimostrazione con il metodo di esaustione

.....

La *dimostrazione per assurdo* generalmente è utilizzata Euclide per dimostrare le proposizioni inverse.

$$\begin{array}{l} A \\ \neg B \end{array} \implies \text{una contraddizione}$$

Alcune proposizioni del primo libro degli Elementi

Prop. I,1: “Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero”.

Sia BC il segmento dato.

Si punti il compasso in B con ampiezza uguale a BC e si tracci una circonferenza.

Si punti il compasso in C con ampiezza uguale a BC e si tracci una circonferenza.

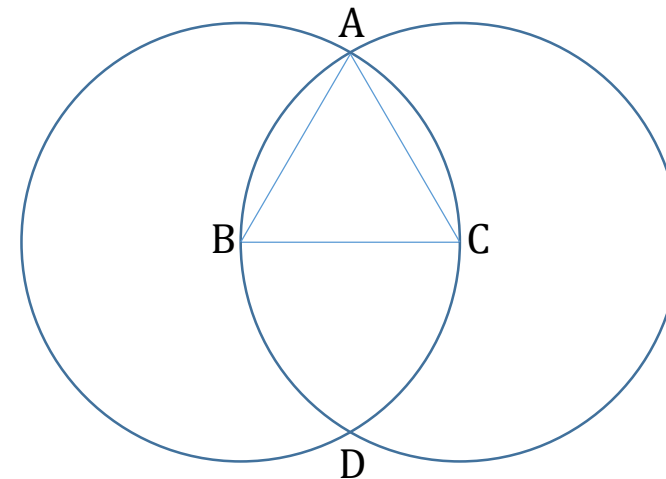
Si unisca uno dei due punti A o D di intersezione delle due circonferenze, ad esempio A , con i punti B e C : si ottiene il triangolo ABC .

$AB = BC$ perché raggi della stessa circonferenza di centro B e raggio BC .

$BC = AC$ perché raggi della stessa circonferenza di centro C e raggio BC .

Per transitività (prima nozione comune), $AB = BC = AC$.

Allora il triangolo ABC è equilatero.



Prop. I,2: “Applicare a un punto dato una retta uguale a una retta data”.

Siano A un punto dato e BC un segmento dato.

Si unisca A con B e si costruisca sul segmento AB il triangolo equilatero ABD .

Si tracci la circonferenza di centro B e raggio BC .

Si prolunghi DB fino a G che si trova sulla precedente circonferenza.

Si tracci la circonferenza di centro D e raggio DG .

Si prolunghi DA fino a L che si trova sulla circonferenza appena tracciata.

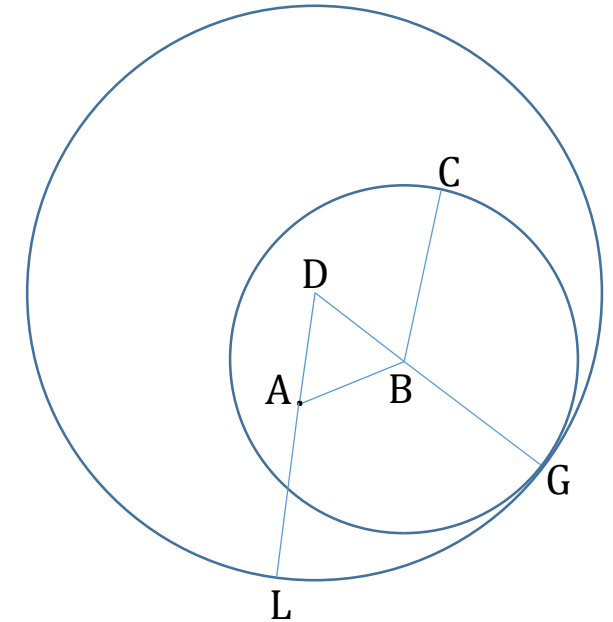
$BC = BG$ perché raggi della stessa circonferenza di centro B e raggio BC .

$DL = DG$ perché raggi della stessa circonferenza di centro D e raggio DG .

Essendo $DL = DA + AL$ e $DG = DB + BG$, si ha $DA + AL = DB + BG$.

Togliendo da due quantità uguali una stessa quantità (o quantità uguali) restano due quantità uguali, per cui $AL = BG$.

Essendo $BG = BC$, si ha $AL = BC$.



Prop. I,3: “Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore”.

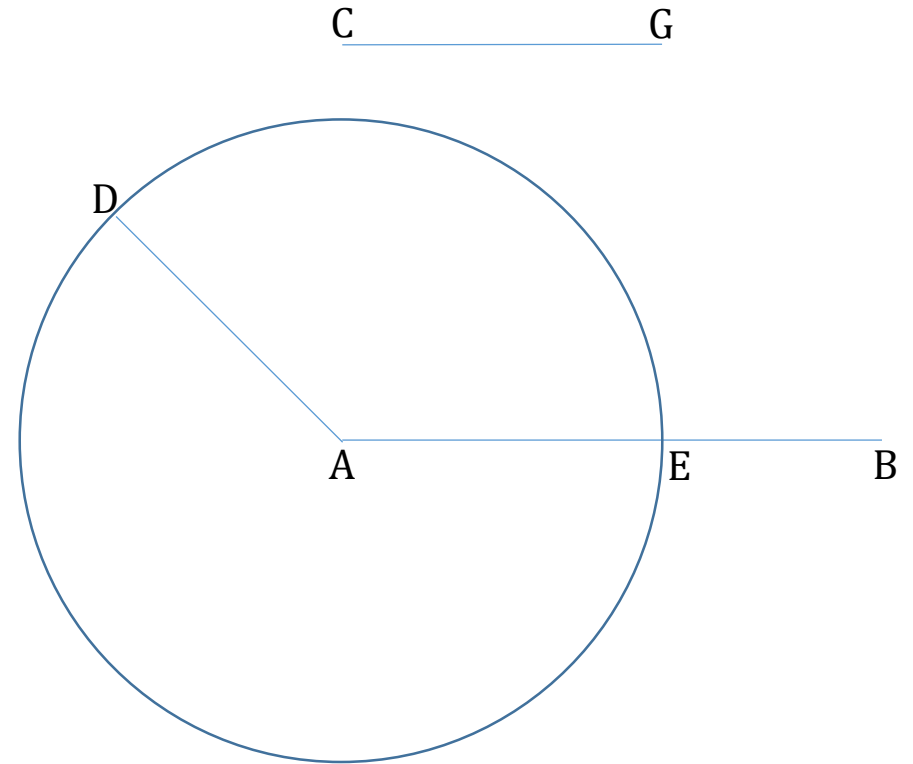
Siano AB e CG due segmenti tali che $AB > CG$.

Si applichi nel punto A il segmento AD uguale al segmento CG .

Si tracci la circonferenza di centro A e raggio AD .

$AE = AD$ perché raggi della stessa circonferenza.

Essendo $AD = CG$, si ha $AE = CG$.



Prop. I,4: “Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati e hanno uguali gli angoli compresi fra i due lati, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo]”.

Siano ABC e DEF due triangoli aventi $AB = DE$, $AC = DF$ e $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

Si sovrapponga il triangolo ABC al triangolo DEF in modo tale che il punto A coincida con il punto D e la retta AB con la retta DE .

Poiché $AB = DE$, anche il punto B coinciderà con il punto E .

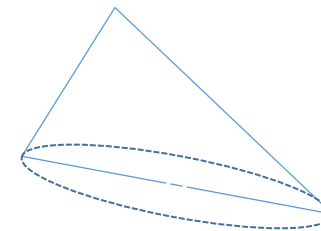
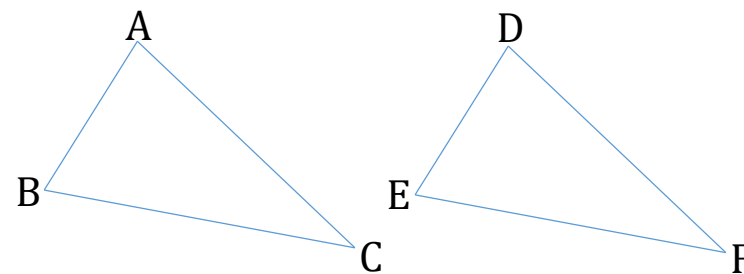
Poiché AC coincide con DE e $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, la retta AC coinciderà con la retta DF .

Poiché $AC = DF$, il punto C coinciderà con il punto F .

Poiché B coincide con E e C coincide con F , anche la base BC dovrà coincidere con la base EF .

Infatti, se questo non succedesse (cioè se BC non coincidesse con EF), poiché B coincide con E e C con F , due rette (BC ed EF) comprenderebbero uno spazio, il che è impossibile.

Dunque, i due triangoli ABC e DEF coincideranno e saranno uguali.



Prop. I,5: “Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro”.

Sia ABC un triangolo isoscele nel quale $AB = AC$.

Si prolunghino i lati AB e AC rispettivamente fino ai punti D ed E .

Su BD si prenda un punto qualunque F .

Da AE si sottragga la retta $AG = AF$.

Si congiunga F con C e G con B .

Si considerino i triangoli AFC e ABG :

$AF = AG$ per costruzione,

$AB = AC$ per ipotesi,

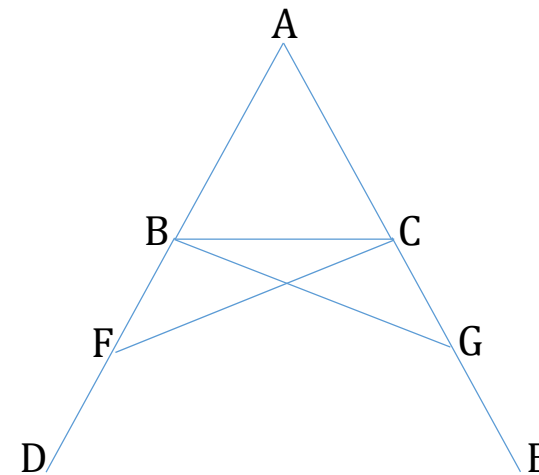
\widehat{FAG} in comune.

Per la prop. I,4 i due triangoli sono uguali e quindi sarà:

$$FC = BG$$

$$\widehat{ACF} = \widehat{ABG}$$

$$\widehat{AFC} = \widehat{AGB}$$



Poiché $AF = AG$ per costruzione e, inoltre, $AF = AB + BF$ e $AG = AC + CG$, si ha: $AB + BF = AC + CG$

Essendo $AB = AC$ per ipotesi, si deduce che $BF = CG$.

Si considerino i triangoli BFC e BCG :

$BF = CG$ per dimostrazione,

$FC = BG$ per dimostrazione,

$\widehat{BFC} = \widehat{BGC}$ per dimostrazione.

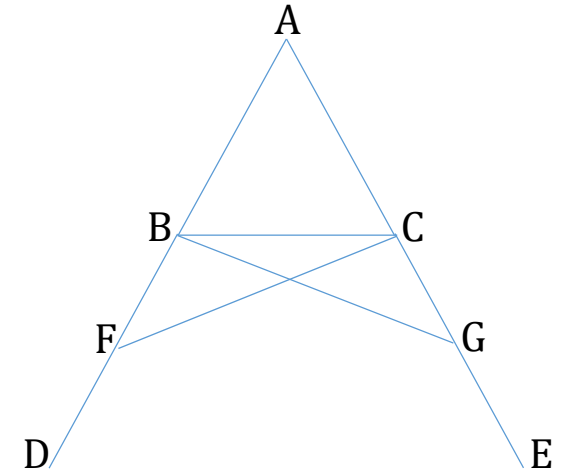
Per la prop. I,4 i due triangoli sono uguali e quindi sarà:

$$\widehat{FBC} = \widehat{GCB} \text{ e } \widehat{BCF} = \widehat{CBG}.$$

Poiché $\widehat{ABG} = \widehat{ACF}$ per dimostrazione e inoltre $\widehat{ABG} = \widehat{ABC} + \widehat{CBG}$ e $\widehat{ACF} = \widehat{ACB} + \widehat{BCF}$, si ha:

$$\widehat{ABC} + \widehat{CBG} = \widehat{ACB} + \widehat{BCF}$$

Essendo $\widehat{CBG} = \widehat{BCF}$ per dimostrazione, risulta $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



Prop. I,6: “Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro”.

Sia ABC un triangolo avente $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Si deve dimostrare che $AB = AC$.

Se AB e AC fossero disuguali, uno dei due sarebbe maggiore dell'altro:

sia $AB > AC$.

Da AB si sottragga $DB = AC$ e si congiunga D con C .

Si considerino i triangoli DBC e ABC :

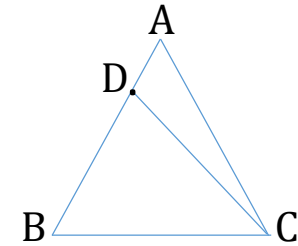
$DB = AC$ per costruzione,

BC in comune,

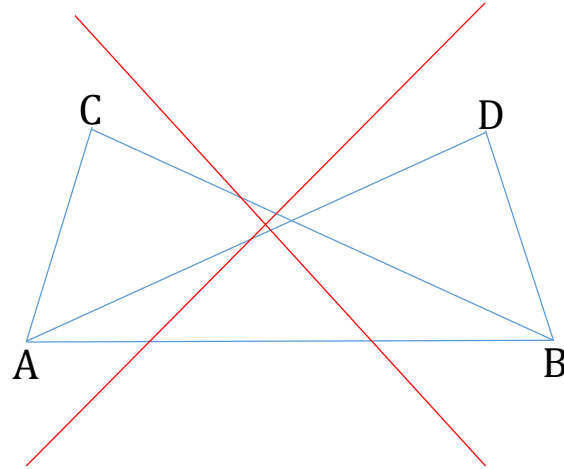
$\widehat{DBC} = \widehat{ACB}$ per ipotesi.

Per la prop.I,4, i due triangoli sono uguali, cioè il triangolo minore DBC è uguale al triangolo maggiore ABC , il che è assurdo.

Quindi $AB = AC$.



Prop. I,7: “Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite e aventi un diverso punto di incontro”.



Prop. I,8: “Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, e hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali”

Prop. I,9: “Dividere per metà un angolo rettilineo dato”.

Sia \widehat{BAC} l'angolo rettilineo dato.

Si prenda su AB un punto a piacere D .

Da AC si sottragga $AE = AD$ e si congiunga D con E .

Si costruisca su DE il triangolo equilatero DEF .

Si congiunga A con F

Si considerino i triangoli ADF e AEF :

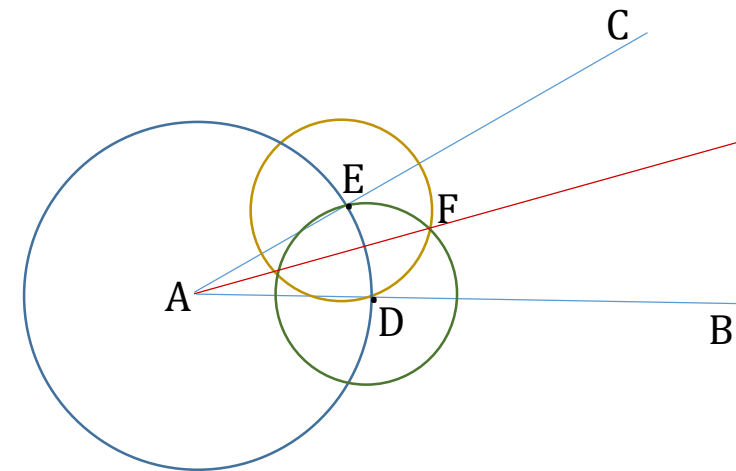
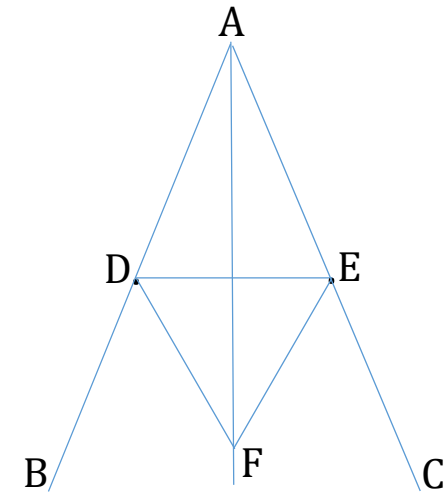
$AD = AE$ per costruzione,

AF in comune,

$DF = EF$ perché lati dello stesso triangolo equilatero.

Per la prop. I,8 i due triangoli sono uguali.

Quindi $\widehat{DAF} = \widehat{EAF}$.



Prop. I,10: “Dividere per metà una retta terminata data”.

Sia AB un segmento dato.

Si costruisca su AB il triangolo equilatero ABC .

Si divida l'angolo \widehat{ACB} a metà con la retta CD .

Si considerino i triangoli ADC e BDC :

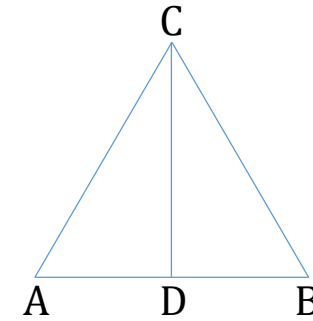
$AC = CB$ perché lati dello stesso triangolo equilatero,

CD in comune,

$\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ perché CD è bisettrice dell'angolo \widehat{ACB} .

Per la prop. I,4 i due triangoli sono uguali e in particolare $AD = DB$.

Prop. I,11: “Su una retta data, da un punto dato su di essa, innalzare una retta perpendicolare”.



Prop. I,12: “A una data retta illimitata, da un punto dato a essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare”.

Sia AB la retta illimitata data e C un punto dato al di fuori di essa.

Si prenda dalla parte opposta di C , rispetto ad AB , un punto qualsiasi D .

Si tracci la circonferenza di centro C e raggio CD

Si divida a metà il segmento EG nel punto H .

Si unisca il punto C con i punti G, H, E .

Si considerino i triangoli CGH e CEH :

$GH = HE$ perché H divide a metà EG ,

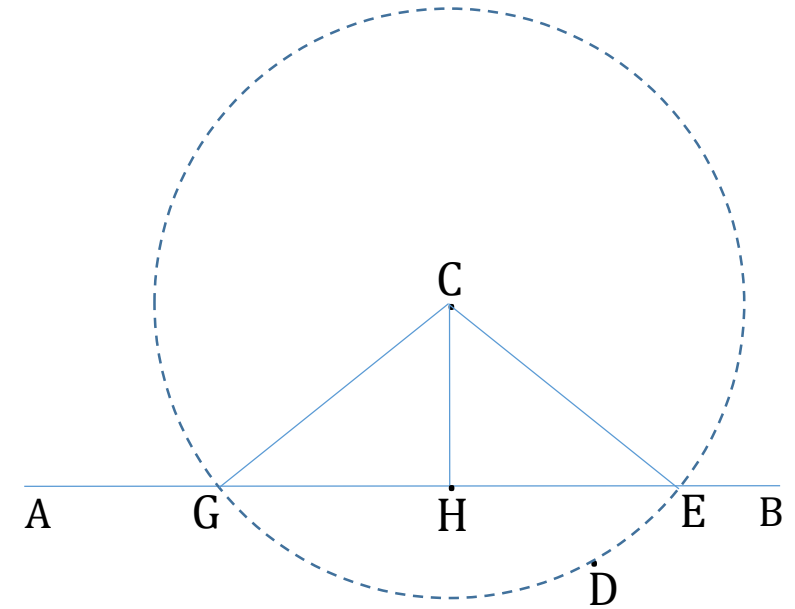
CH in comune,

$CG = CE$ perché raggi della stessa circonferenza.

Per la prop. I,8 i due triangoli sono uguali e in particolare si ha: $\widehat{CHG} = \widehat{CHE}$.

Essendo gli angoli \widehat{CHG} e \widehat{CHE} uguali e adiacenti, sono retti.

Dunque, CH è perpendicolare ad AB .



Prop. I,13: “Se una retta innalzata su un'altra forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti o angoli la cui somma è uguale a due retti”.

Prop. I,14: “Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto a essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro”.

Prop. I,15: “Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali”.

Si considerino le rette AB e CD che si intersecano nel punto E .

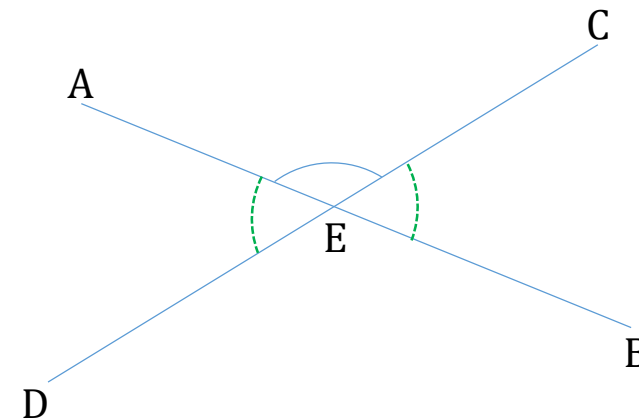
Si ha: $\widehat{AEC} + \widehat{CEB} = 2R$

$$\widehat{DEA} + \widehat{AEC} = 2R$$

Poiché due quantità uguali a una stessa sono uguali tra loro, si può scrivere:

$$\widehat{AEC} + \widehat{CEB} = \widehat{DEA} + \widehat{AEC}.$$

Poiché se da due quantità uguali si sottrae una stessa quantità i resti sono uguali, si ottiene: $\widehat{CEB} = \widehat{DEA}$.



Prop. I,16: “In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l’angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti”.

Si consideri un triangolo qualunque ABC .

Si prolunghi BC dalla parte di C individuando un punto D .

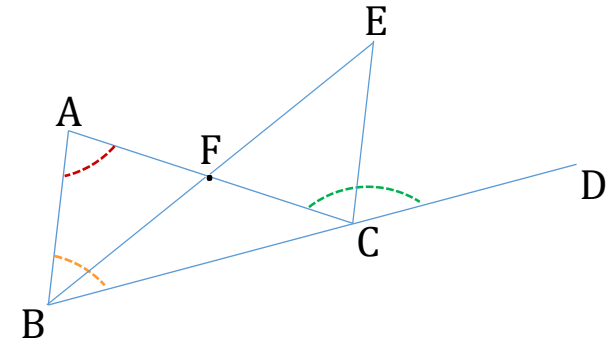
Si deve dimostrare che $\widehat{ACD} > \widehat{CAB}$ e $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$.

Dimostriamo che $\widehat{ACD} > \widehat{CAB}$.

Si divida AC in due parti uguali in F , si congiunga B con F

e si prolunghi BF fino al punto E in modo che $BF = FE$

Si congiunga E con C .



Si considerino i triangoli AFB e FEC :

$BF = FE$ per costruzione,

$AF = FC$ per costruzione,

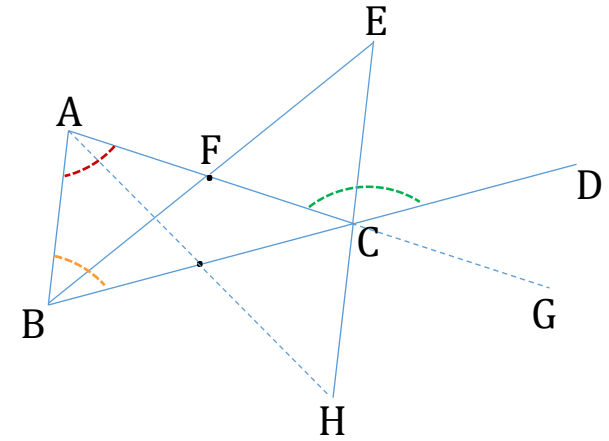
$\widehat{AFB} = \widehat{CFE}$ perché opposti al vertice.

Per la prop. I,4 essi sono uguali.

In particolare, risulta: $\widehat{BAF} = \widehat{FCE}$.

Ma $\widehat{ACD} > \widehat{FCE}$, quindi $\widehat{ACD} > \widehat{BAF}$.

Allo stesso modo si dimostra che $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$.



Prop. I,17: “In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti”.

Sia ABC un triangolo qualunque.

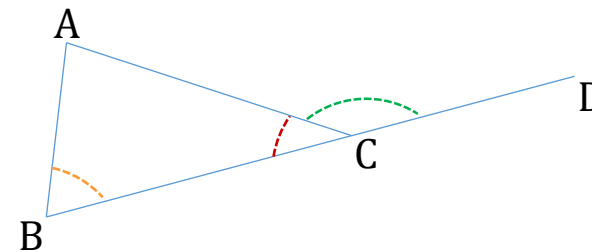
Si prolunghi BC fino al punto D .

Si ha: $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$.

Sommando ad ambo i membri \widehat{ACB} si ha: $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} > \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

Poiché $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} = 2R$, sarà $2R > \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

Analogamente si dimostra che $2R > \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ e $2R > \widehat{CAB} + \widehat{ABC}$.



Prop. I,18: “In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore”.

Prop. I,19: “In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore”

Prop. I,20: “In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente”.

Prop. I,21: “Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore”.

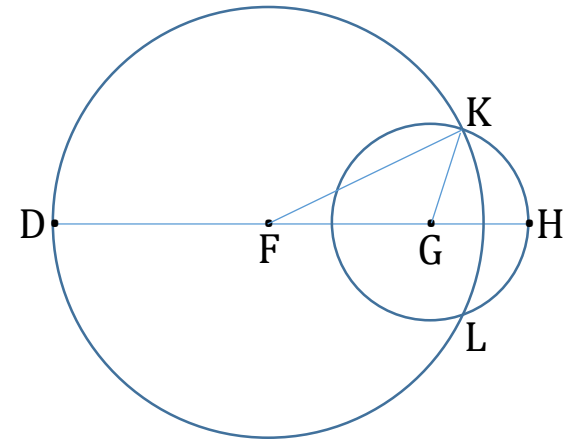
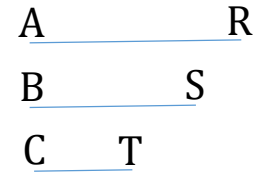
Prop. I,22: “Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente (I,20)”.

Siano AR , BS e CT tre segmenti tali che:

$$AR + BS > CT,$$

$$AR + CT > BS,$$

$$BS + CT > AR.$$



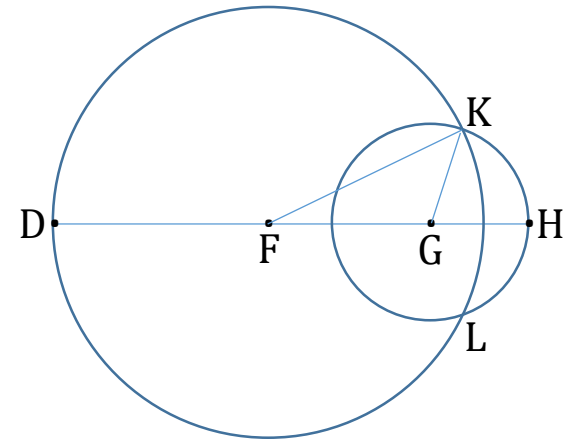
Su una retta si considerino i segmenti $DF = AR$, $FG = BS$ e $GH = CT$.

Si tracci la circonferenza di centro F e raggio FD .

Si tracci la circonferenza di centro G e raggio GH .

Si unisca uno dei due punti K , L , ad esempio K , di intersezione delle circonferenze con F e con G .

$A \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad R$
 $B \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad S$
 $C \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad T$



$FD = FK$ perché raggi della stessa circonferenza di centro F e raggio FD .

$FD = AR$, quindi $FK = AR$.

$GH = GK$ perché raggi della stessa circonferenza di centro G e raggio GH .

$GH = CT$, quindi $GK = CT$.

$FG = BS$ per costruzione.

Il triangolo FKG è il triangolo cercato.

Prop. I,23: “Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale a un angolo rettilineo dato”

Prop. I,24: “Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l’angolo compreso dai lati uguali maggiore dell’angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base”

Prop. I,25: “Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l’angolo compreso dai lati uguali maggiore dell’angolo corrispondente”

Prop. I,26: “Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli e un lato uguale a un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto a uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l’angolo rimanente uguale all’angolo rimanente”.

Prop. I,26: “Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli e un lato uguale a un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto a uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l’angolo rimanente uguale all’angolo rimanente”.

Dimostriamo la seconda parte della proposizione.

Sappiamo che:

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF},$$

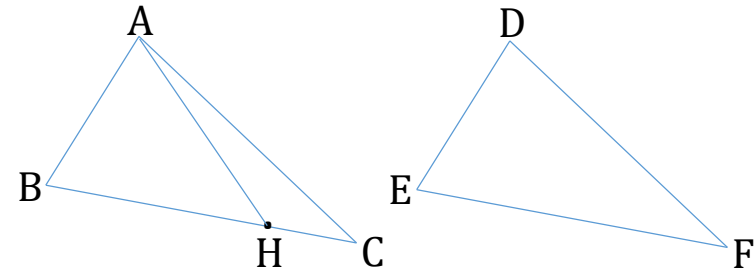
$$\widehat{ACB} = \widehat{DFE},$$

$$AB = DE.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$BC = EF,$$

...



Supponiamo per assurdo che sia $BC \neq EF$.

Sia $BC > EF$.

Poniamo $BH = EF$.

Congiungiamo A con H .

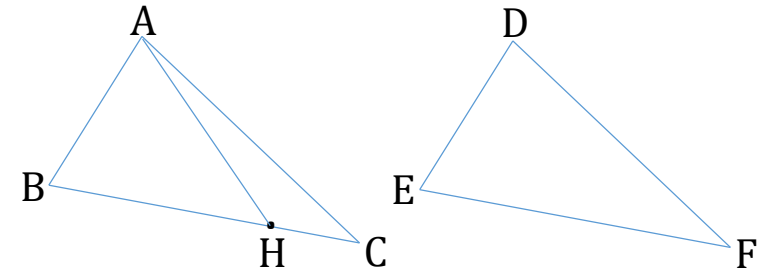
Consideriamo i triangoli \widehat{ABH} e \widehat{DEF} :

$AB = DE$ per ipotesi,

$BH = EF$ per costruzione,

$\widehat{ABH} = \widehat{DEF}$ per ipotesi.

Per la prop. I,4 i due triangoli sono congruenti
e in particolare risulta $\widehat{BHA} = \widehat{EFD}$.



Poiché $\widehat{EFD} = \widehat{BCA}$ per ipotesi, risulta $\widehat{BHA} = \widehat{BCA}$, il che è assurdo.

Quindi, deve essere $BC = EF$.

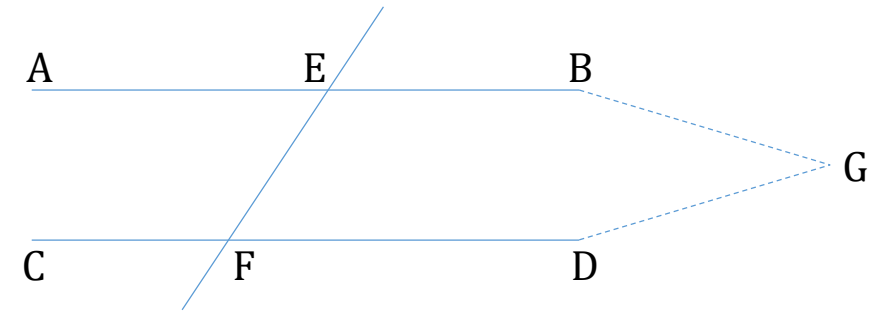
Essendo anche $AB = DE$ e $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, i triangoli ABC e DEF sono congruenti per la prop. I,4.

Prop. I,27: “Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, allora le due rette saranno fra loro parallele”

Consideriamo due rette, AB e CD , tagliate dalla trasversale EF .

Supponiamo che sia $\widehat{AEF} = \widehat{EFD}$.

Dobbiamo dimostrare che $AB \parallel CD$.



Se AB e CD non fossero parallele, prolungate si incontrerebbero dalla parte di B, D o dalla parte di A, C .

Supponiamo che si incontrino dalla parte di B, D nel punto G .

In tal caso, nel triangolo GEF , l'angolo esterno \widehat{AEF} sarebbe uguale all'angolo interno e opposto \widehat{EFG} , il che è impossibile.

Quindi AB e CD , prolungate, non potranno incontrarsi dalla parte di B, D .

Allo stesso modo si dimostra che non possono incontrarsi dalla parte di A, C .

Allora $AB \parallel CD$.

Prop.I,28: “Se una retta che cada su due rette forma l’angolo esterno uguale all’angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro”.

Siano AB e CD due rette tagliate dalla trasversale EF .

Sia $\widehat{EGB} = \widehat{GHD}$ oppure $\widehat{BGH} + \widehat{GHD} = 2R$.

Si deve dimostrare che $AB \parallel CD$.

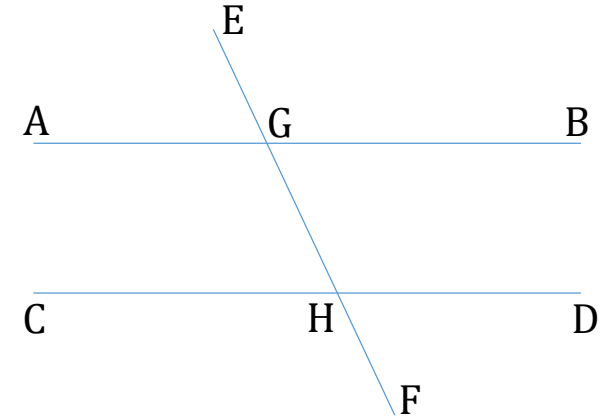
Si supponga che sia $\widehat{EGB} = \widehat{GHD}$.

Poiché è anche $\widehat{EGB} = \widehat{AGH}$, risulta $\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$ e, poiché essi sono alterni, $AB \parallel CD$ (prop.I,27).

Si supponga che sia $\widehat{BGH} + \widehat{GHD} = 2R$.

Poiché anche $\widehat{AGH} + \widehat{BGH} = 2R$, risulta $\widehat{AGH} + \widehat{BGH} = \widehat{BGH} + \widehat{GHD}$.

Se si sottrae da ambedue le somme \widehat{BGH} , rimane $\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$ e, poiché essi sono angoli alterni, sarà $AB \parallel CD$.



Prop. I,29: “Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l’angolo esterno uguale all’angolo interno e opposto, e angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti”.

Siano AB e CD due rette parallele tagliate dalla trasversale EF .

Si deve dimostrare che $\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$, $\widehat{EGB} = \widehat{GHD}$ e $\widehat{BGH} + \widehat{GHD} = 2R$.

Supponiamo che sia $\widehat{AGH} \neq \widehat{GHD}$ e $\widehat{AGH} > \widehat{GHD}$.

Se si aggiunge a entrambi l’angolo \widehat{BGH} , risulta:

$$\widehat{AGH} + \widehat{BGH} > \widehat{BGH} + \widehat{GHD}.$$

Essendo $\widehat{AGH} + \widehat{BGH} = 2R$, sarà $\widehat{BGH} + \widehat{GHD} < 2R$.

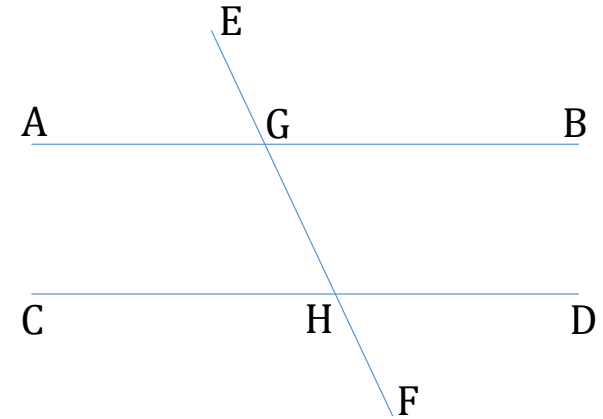
Allora, per il V postulato, le rette AB e CD dovrebbero incontrarsi, il che è assurdo perché sono parallele.

Quindi $\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$

Essendo anche $\widehat{AGH} = \widehat{EGB}$, risulta $\widehat{EGB} = \widehat{GHD}$.

Se si aggiunge a entrambi l’angolo \widehat{BGH} si ottiene: $\widehat{EGB} + \widehat{BGH} = \widehat{BGH} + \widehat{GHD}$.

Essendo $\widehat{EGB} + \widehat{BGH} = 2R$, sarà $\widehat{BGH} + \widehat{GHD} = 2R$.

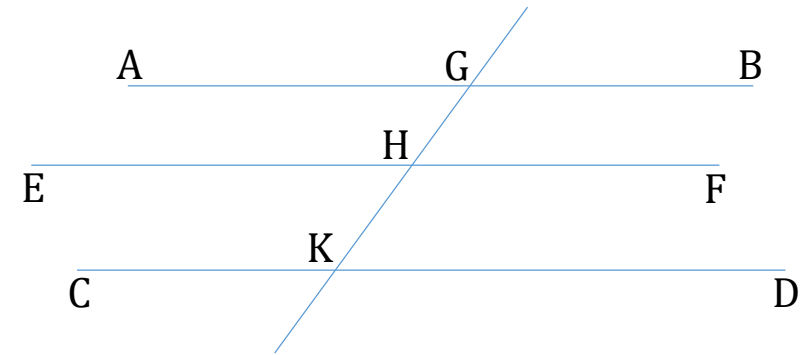


Prop. I,30: “Rette parallele a una stessa sono parallele anche fra loro”.

Siano $AB \parallel EF$ e $CD \parallel EF$.

Dobbiamo dimostrare che $AB \parallel CD$.

Tracciamo la trasversale GHK .



Poiché $AB \parallel EF$ risulta $\widehat{AGK} = \widehat{GHF}$ perché alterni interni.

Poiché $CD \parallel EF$ risulta $\widehat{GHF} = \widehat{GKD}$ perché corrispondenti.

Quindi $\widehat{AGK} = \widehat{GKD}$.

Poiché \widehat{AGK} e \widehat{GKD} sono alterni interni congruenti, deve essere $AB \parallel CD$.

Prop. I,31: “Condurre per un punto dato una linea retta parallela a una retta data”.

Siano A il punto dato e BC la retta data.

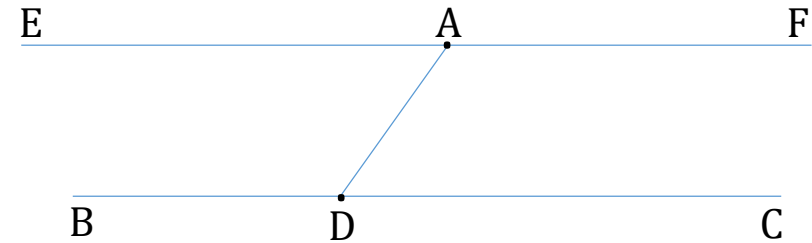
Si prenda su BC un punto qualunque D .

Si unisca A con D .

Sulla retta AD e con vertice in A si costruisca $\widehat{DAE} = \widehat{ADC}$.

Si prolunghi EA fino al punto F .

Poiché la retta AD , cadendo su BC ed EF forma gli angoli alterni $\widehat{DAE} = \widehat{ADC}$, la retta EAF è parallela a BC .



Prop. I,32: “In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l’angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni e opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti”.

Sia ABC un triangolo.

Si prolunghi BC fino al punto E .

Per il punto C si tracci $CD \parallel AB$ (prop.I,31).

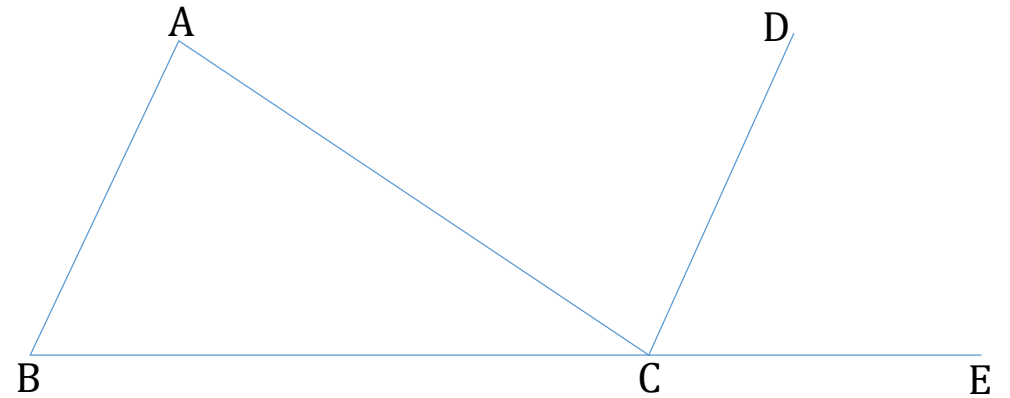
$\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC .

$\widehat{ABC} = \widehat{DCE}$ perché corrispondenti rispetto alle stesse parallele (AB e CD) tagliate dalla trasversale BE .

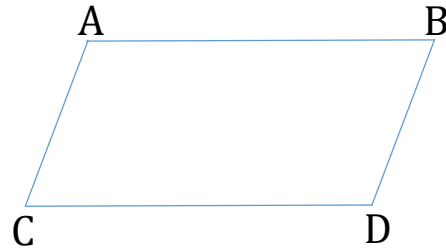
Allora risulta $\widehat{ACD} + \widehat{DCE} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$, cioè $\widehat{ACE} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$.

Se si aggiunge l’angolo \widehat{ACB} si ottiene $\widehat{ACE} + \widehat{ACB} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

Essendo $\widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 2R$ si ottiene $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2R$.

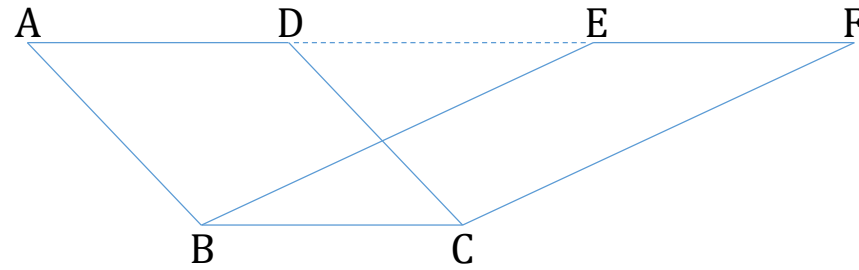


Prop. I,33: “Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono anch’esse uguali e parallele”.

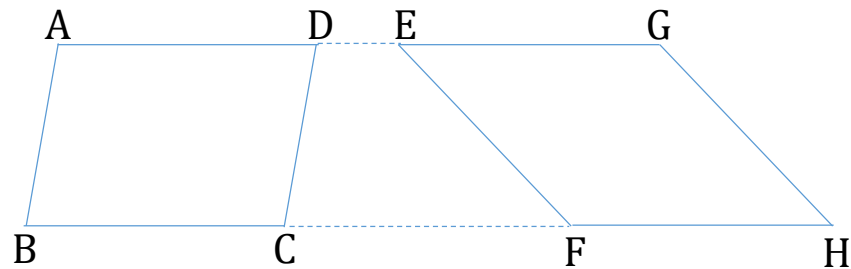


Prop. I,34: “I parallelogrammi hanno lati e angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali”

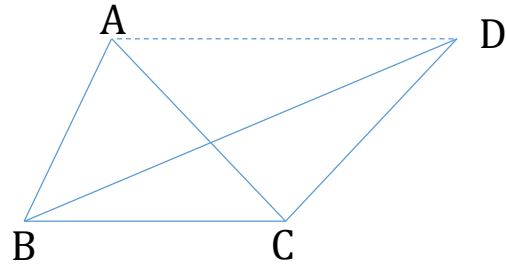
Prop. I,35: “Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro”.



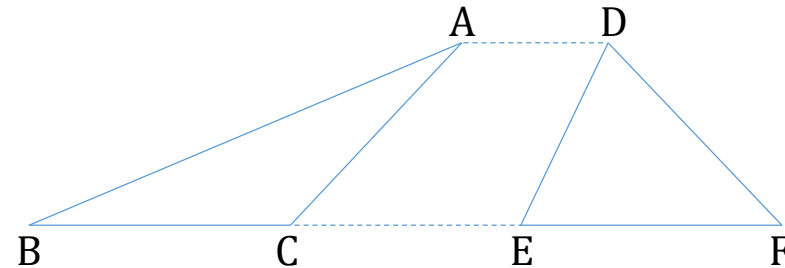
Prop. I,36: “Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro”.



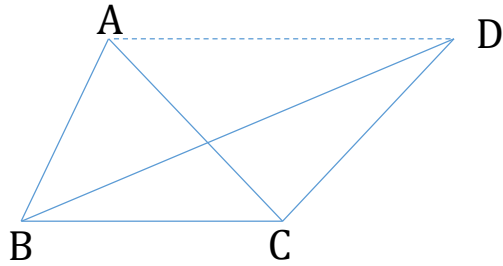
Prop. I,37: “Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro”.



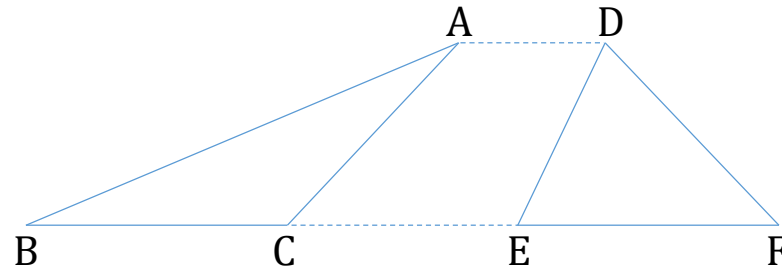
Prop. I,38: “Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro”.



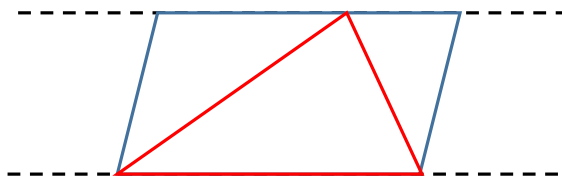
Prop. I,39: “Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele”.



Prop. I,40: “Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele”.

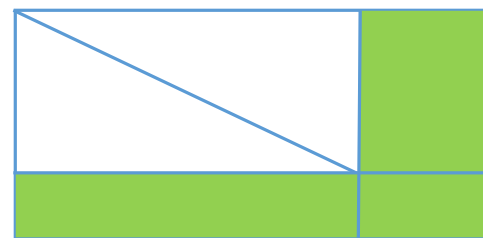
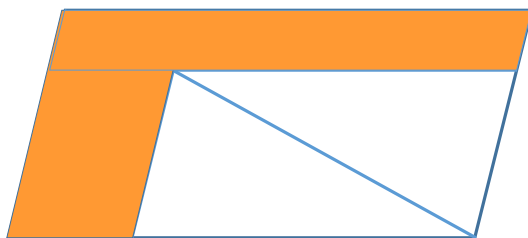


Prop. I,41: “Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo”.



Prop. I,42: “Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale a un triangolo dato”.

Prop. I,43: “In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali tra loro”.



Prop. I,44: “Applicare a una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogramma uguale a un triangolo dato”.

“Applicare a una retta data un’area data”

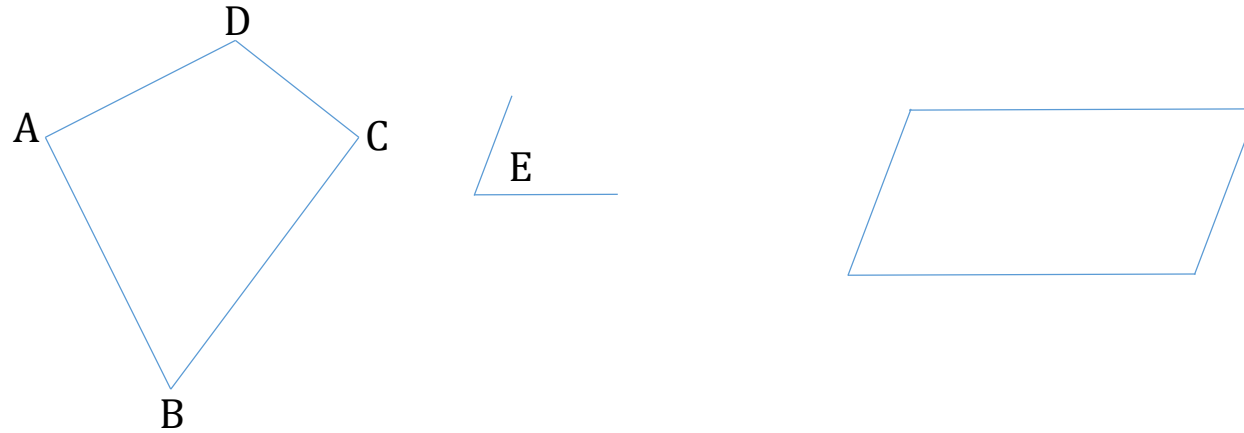
Si hanno tre tipi di applicazioni delle aree:

applicazione parabolica, quando l’area da applicare è uguale a quella data;

applicazione iperbolica, quando l’area da applicare è maggiore di quella data;

applicazione ellittica, quando l’area da applicare è minore di quella data.

Prop. I,45: “Costruire un parallelogrammo uguale a una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo”



Prop. I,46: “Descrivere un quadrato su una retta data”.

Prop. I,47: “Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all’angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l’angolo retto”.

Sia ABC un triangolo rettangolo e sia $\widehat{BAC} = 1R$.

Si costruiscano su BC il quadrato $BDEC$, su BA il quadrato $AGFB$
e su AC il quadrato $ACKH$

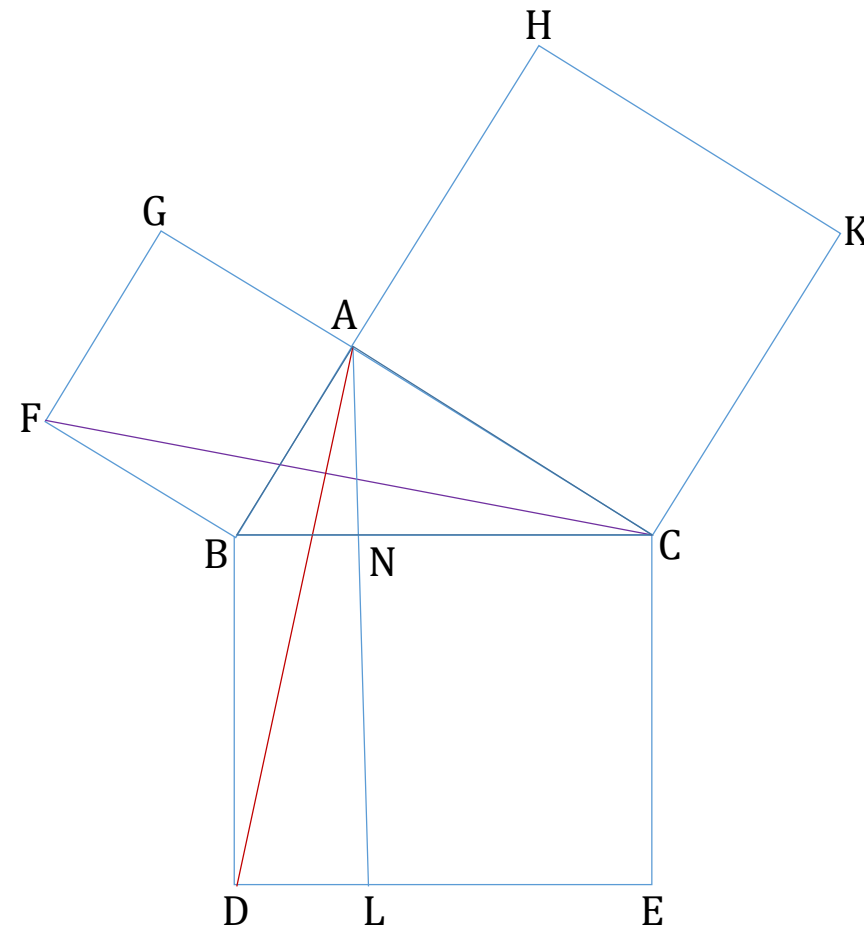
Per A si conduca AL parallela a BD o a CE .

Si unisca A con D e F con C .

Poiché $\widehat{BAC} = 1R$ e $\widehat{BAG} = 1R$, e sono angoli adiacenti,
 CA è in linea retta con AG

Se a $\widehat{DBC} = \widehat{FBA} = 1R$ si aggiunge l’angolo \widehat{ABC} , si ottiene:

$$\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC}, \text{ cioè } \widehat{DBA} = \widehat{FBC}.$$



Si considerino i triangoli ABD e FBC :

$DB = BC$ perché lati dello stesso quadrato,

$FB = BA$ perché lati dello stesso quadrato,

$\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$ per dimostrazione.

Per la prop.I,4 in particolare risulta $AD = FC$.

$$r(BDLN) = 2tr(ABD)$$

$$q(GFBA) = 2tr(FBC)$$

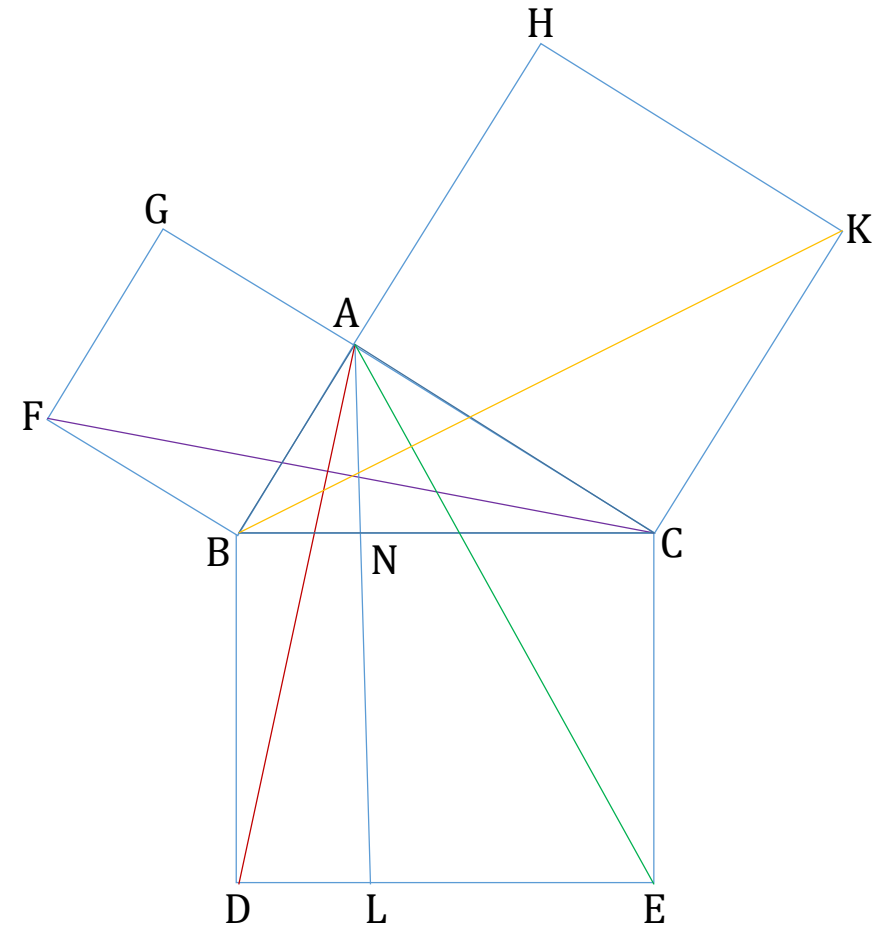
Poiché doppi di cose uguali sono uguali fra loro, risulta:

$$r(BDLN) = q(GFBA)$$

Allo stesso modo, unendo A con E , B con K , si dimostra che

$$r(CNLE) = q(HACK)$$

Dunque $q(BDEC) = q(GFBA) + q(HACK)$.



I teorema di Euclide

II teorema di Euclide

Prop. I,48: “Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l’angolo che è compreso dei due rimanenti lati del triangolo è retto”.

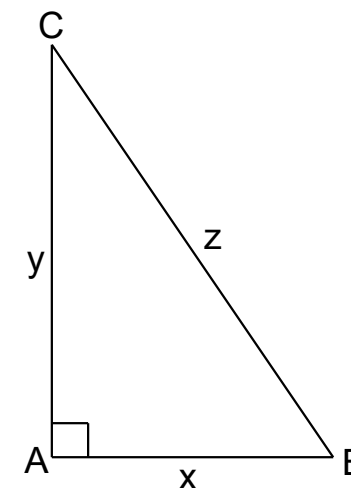
La ricerca delle terne pitagoriche

Sia ABC un triangolo con $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Se si pone $AB = x$, $AC = y$, $CB = z$, allora si può scrivere

$$x^2 + y^2 = z^2$$

La terna (x, y, z) è detta “terna pitagorica”.



Una terna pitagorica (x, y, z) si dice *primitiva* se non esiste un intero maggiore di 1 che divide contemporaneamente x , y , z .

Data la terna pitagorica (x, y, z) , da essa possono ricavarsi infinite altre terne sue “multiple” (kx, ky, kz) al variare di k tra gli interi positivi.

Nel *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* di Proclo si trovano due metodi per determinare terne pitagoriche attribuiti rispettivamente a Pitagora e a Platone.

metodo pitagorico

Si parte da un numero dispari x che costituisce il primo numero della terna.

Il secondo numero è $\frac{x^2 - 1}{2}$

Il terzo numero è $\frac{x^2 - 1}{2} + 1$ cioè $\frac{x^2 + 1}{2}$

$$\left(x, \frac{x^2 - 1}{2}, \frac{x^2 + 1}{2} \right)$$

metodo platonico

Si parte da un numero pari x che costituisce il primo numero della terna.

Il secondo numero è $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$

Il terzo numero è $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$

$$\left(x, \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right)$$

L'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ si può generalizzare nella seguente: $x^n + y^n = z^n$

Trovare le soluzioni positive intere per x, y, z per $n \geq 3$ costituisce l'*ultimo teorema di Fermat*.

La dimostrazione dell'impossibilità di trovare tali soluzioni è stata fatta nel 1994 da A. J. Wiles.

Esempi di quadrilateri logici nel primo libro degli Elementi
(con qualche "adattamento")

Prop. I, 4

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow AC = A'C'$$



Prop. I, 24

$$\widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'} \Rightarrow AC \neq A'C'$$

Prop. I, 8

$$AC = A'C' \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



Prop. I, 25

$$AC \neq A'C' \Rightarrow \widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'}$$

Prop. I, 5

$$AB = BC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$$

Prop. I, 18

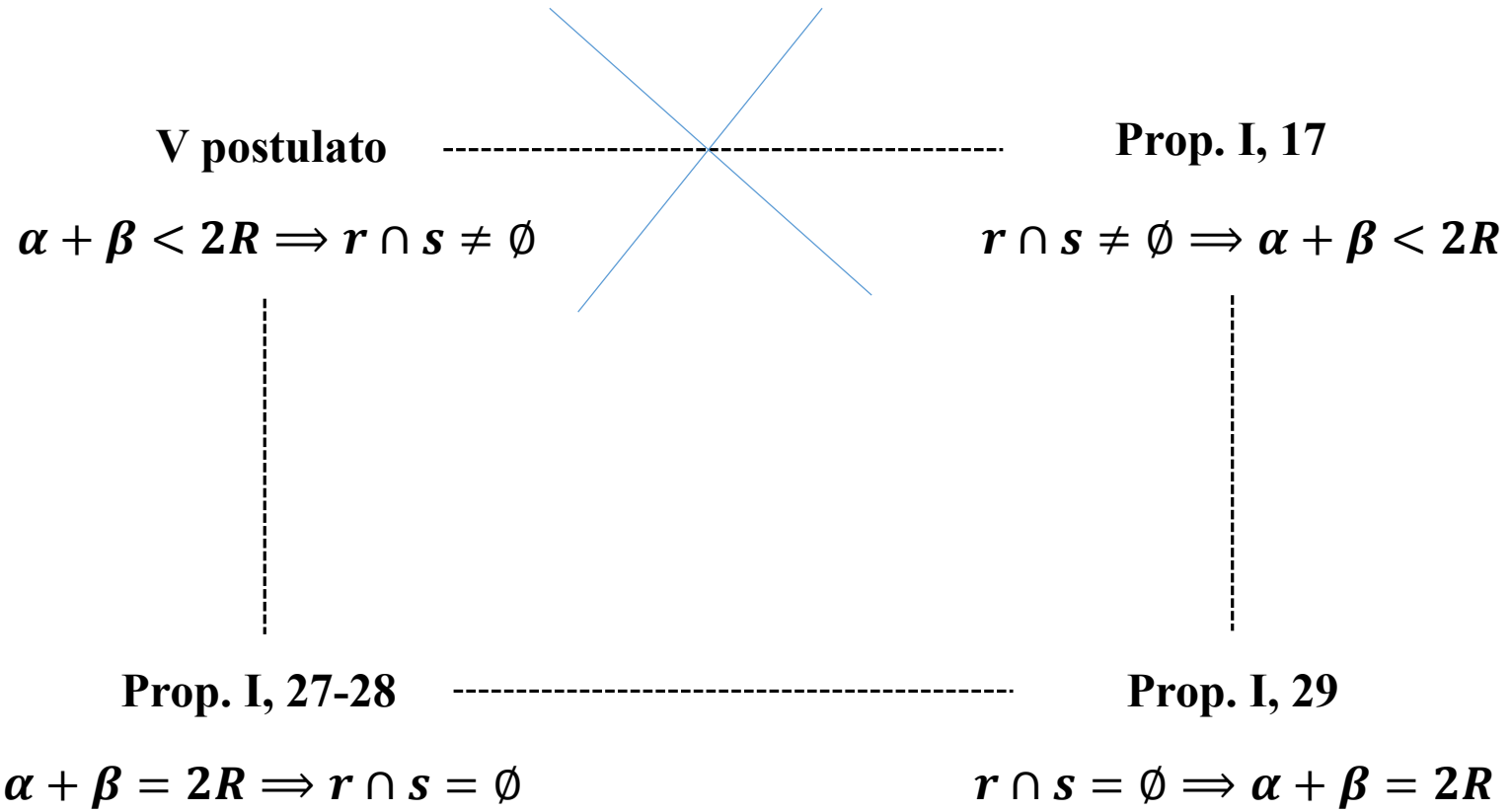
$$AB \neq BC \Rightarrow \widehat{BAC} \neq \widehat{BCA}$$

Prop. I, 6

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} \Rightarrow AB = BC$$

Prop. I, 19

$$\widehat{BAC} \neq \widehat{BCA} \Rightarrow AB \neq BC$$



Il problema delle parallele

Perché le parallele cominciano a costituire un “problema”?

Alcuni motivi principali:

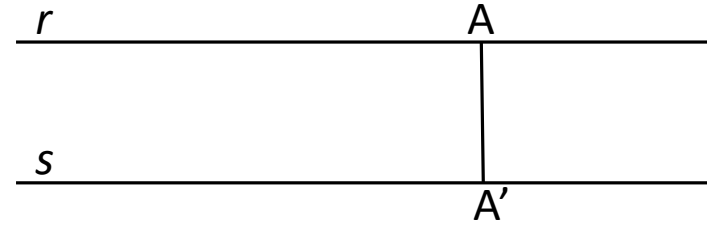
- nella def. I, 23 di rette parallele e nel V postulato Euclide usa il termine “infinito”
- il V postulato non è evidente come i primi quattro
- Euclide non si serve del V postulato fino alla prop. I, 28
- la prop. I, 17 sembrerebbe l’inversa del V postulato

Come si è cercato di risolvere il “problema delle parallele”?

Definizione di rette parallele di Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679)

Consideriamo due rette r e s .

Su r ci sono tanti punti quanti ve ne sono su s .

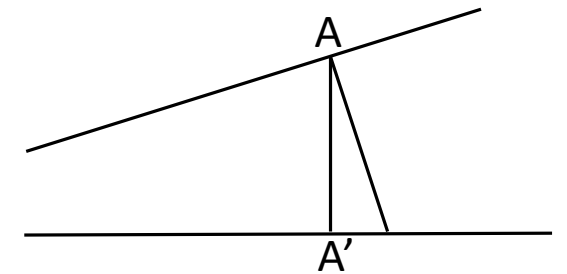


Allora possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra le due rette in modo tale che a un punto della prima corrisponda un punto della seconda.

Possiamo, dunque, considerare coppie di punti corrispondenti (A, A') , con $A \in r$ e $A' \in s$.

Tracciamo la perpendicolare a r passante per A e la perpendicolare a s passante per A' .

Se le due rette perpendicolari coincidono allora r e s sono parallele.



Due rette sono parallele quando hanno la stessa perpendicolare passante per punti corrispondenti.

Alcuni tentativi di sostituzione del V postulato

Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto passa una e una sola retta parallela a quella data

J. Playfar

Non esistono rette asintotiche

prime discussioni sulla non evidenza del V postulato
e primi tentativi di trovarne una soluzione

Esistono rette equidistanti

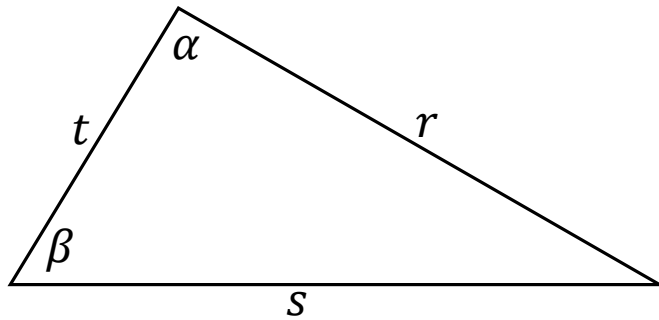
Posidonio

Dato un triangolo, ne esiste uno simile a quello dato e grande a piacere

J. Wallis

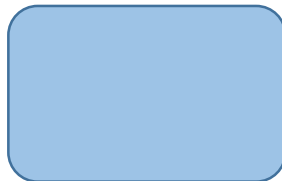
Possiamo considerare il V postulato e la prop. I, 17 l'uno l'inverso dell'altra?

Prop. I, 17



Hp:

$$r \cap s \neq \emptyset$$

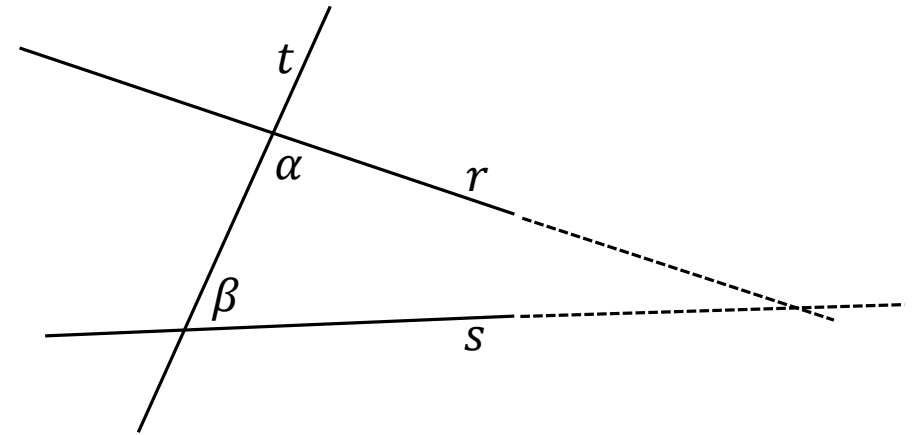


Ts:

$$\alpha + \beta < 2R$$



V postulato



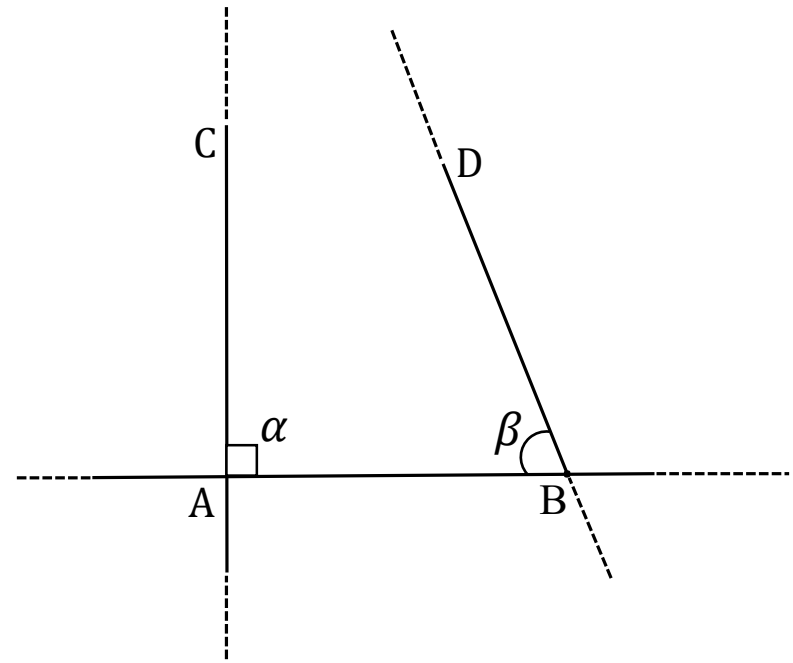
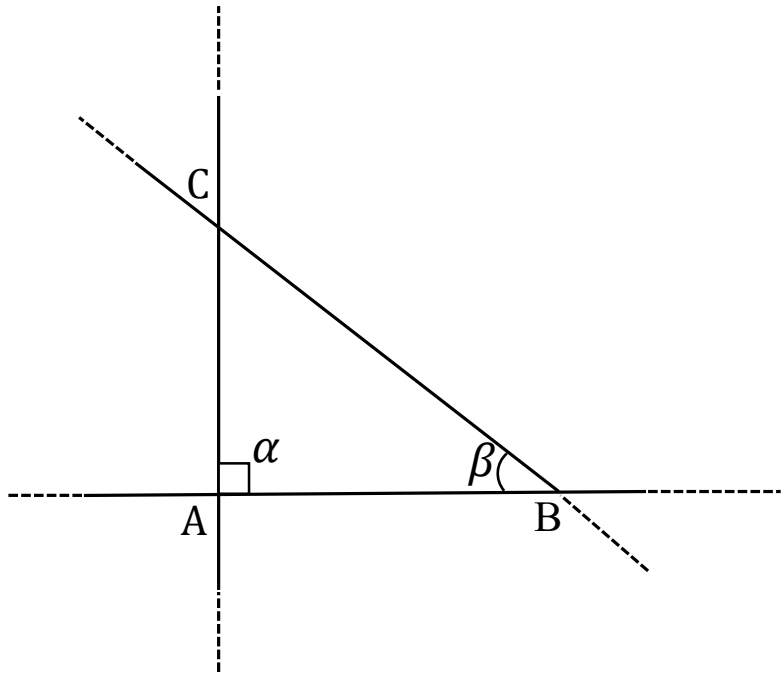
Hp:

$$\alpha + \beta < 2R$$

Ts:

$$r \cap s \neq \emptyset$$

Def. I, 14: *Figura è ciò che è compreso da uno o più termini*



Prop. I,1

Prop. I,2

Prop. I,3

.....

Prop. I,27

Prop. I,28

V postulato →

Prop. I,29

Prop. I,1

Prop. I,2

Prop. I,3

.....

Prop. I,27

Prop. I,28

← negazione del V postulato

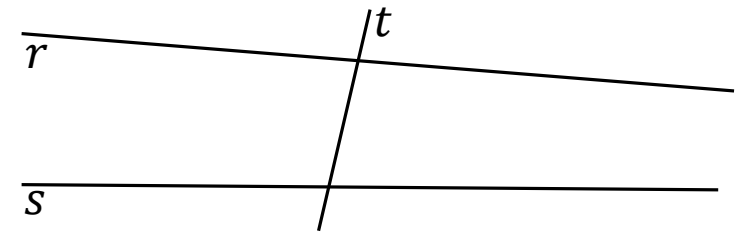
Prop. I,29

sistema contraddittorio?

Proclo (V sec. d.C.)

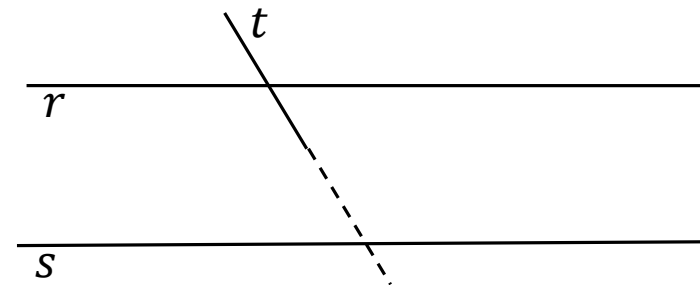
Lemma I:

Date due rette r e s tagliate da una trasversale t , se a destra di t la distanza tra le due rette diminuisce sempre di più e a sinistra di t la distanza tra le due rette aumenta sempre di più, allora a destra di t le rette sono convergenti, mentre a sinistra di t sono divergenti.



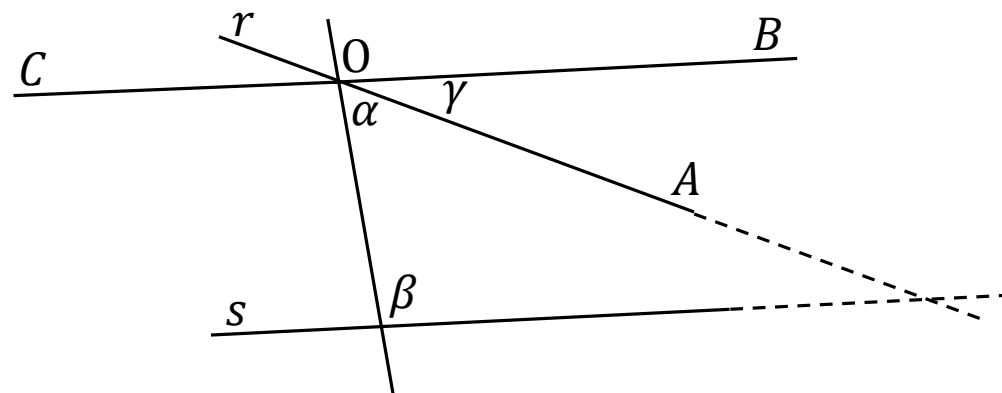
Lemma II:

Date due rette r e s parallele, se si ha una retta trasversale t che interseca la prima retta e la si prolunga all'infinito, essa intersecherà anche la seconda retta.



V postulato

Hp: $\alpha + \beta < 2R$ Ts: $r \cap s \neq \emptyset$



Se $\alpha + \beta < 2R$, esiste un angolo rettilineo γ tale che $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, cioè tale che $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

Si costruisca un angolo uguale a γ con vertice nel punto O e delimitato dalle rette OA e OB .

Si prolunghi BO fino al punto C .

Per il lemma I, r e s convergono dalla parte di α e β e divergono dall'altra parte.

Per il lemma II applicato alle rette CB e s , la trasversale r , che interseca CB , deve intersecare anche s .

Quindi r e s devono intersecarsi.

Cristoforo Clavio (1537-1612)

“Commento agli *Elementi* di Euclide”

1574

“Scoglio” tra le prop. 28 e 29

Il V postulato (“assioma XIII”)
deve essere considerato un teorema

La dimostrazione di Proclo è “ottima”

1589

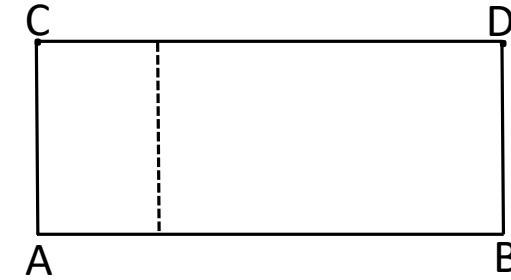
“Scoglio” tra le prop. 28 e 29

La dimostrazione di Proclo non va più bene

Clavio decide di dare una “sua” dimostrazione basata solo sulle prime 28 proposizioni euclidee, nelle quali non è usato il V postulato

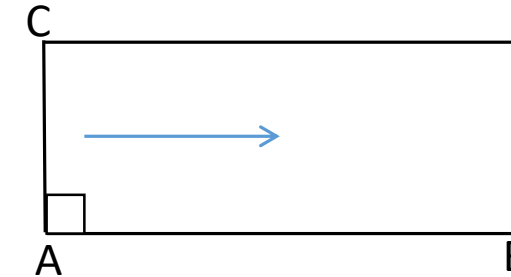
Lemma I:

La linea, i cui punti hanno la stessa distanza da una retta che è nello stesso piano, è una retta.



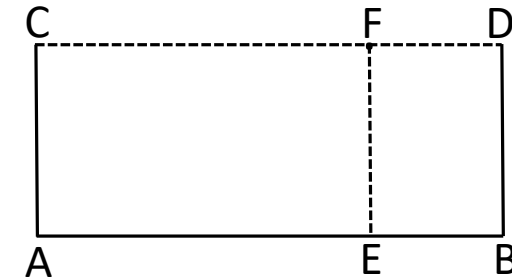
Lemma II:

Se una retta si muove trasversalmente su un'altra retta, formando con un suo estremo angoli sempre retti, descrive con l'altro estremo anche una retta.



Lemma III:

Se a una retta si erigono due rette perpendicolari tra loro uguali, i cui estremi sono congiunti da una retta, la perpendicolare, tracciata da qualunque punto di questa retta alla prima, sarà uguale alle due perpendicolari.



Lemma IV:

Se a una retta si erigono due perpendicolari tra loro uguali, i cui estremi sono congiunti da una retta, questa retta formerà un angolo retto con ambedue le perpendicolari.

Prima dimostrazione

Si divida AB in due parti uguali nel punto E .

Si tracci $EF \perp AB$.

Si unisca F con A e con B .

Si considerino i triangoli AEF e BEF :

$$AE = EB, \quad EF \text{ in comune}, \quad \widehat{AEF} = \widehat{BEF}.$$

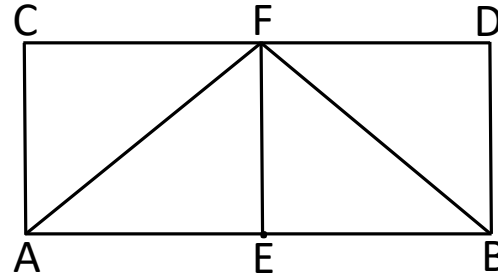
Per il I criterio essi sono congruenti e risulta:

$$AF = BF \quad \widehat{FAE} = \widehat{FBE} \quad \widehat{AFE} = \widehat{BFE}$$

Essendo $\widehat{CAE} = \widehat{DBE} = 90^\circ$ e $\widehat{FAE} = \widehat{FBE}$

risulta:

$$\widehat{CAE} - \widehat{FAE} = \widehat{DBE} - \widehat{FBE}, \text{ cioè } \widehat{CAF} = \widehat{DBF}.$$



Si considerino i triangoli ACF e BDF :

$$CA = BD, \quad AF = BF, \quad \widehat{CAF} = \widehat{DBF}.$$

Per il I criterio essi sono congruenti e risulta:

$$CF = FD \quad \widehat{ACF} = \widehat{BDF} \quad \widehat{AFC} = \widehat{BFD}$$

Si ha: $\widehat{CFA} + \widehat{AFE} = \widehat{DFB} + \widehat{BFE}$.

Allora $\widehat{CFE} = \widehat{DFE} = 90^\circ$.

Per il lemma III si ha $EF = AC = BD$.

Poiché $EF \perp AE$, $AC \perp AE$, deve essere $\widehat{ACF} = \widehat{CFE}$.

Ma $\widehat{CFE} = 90^\circ$. Allora $\widehat{ACF} = 90^\circ$

Allo stesso modo si dimostra che $\widehat{BDF} = 90^\circ$.

Teorema:

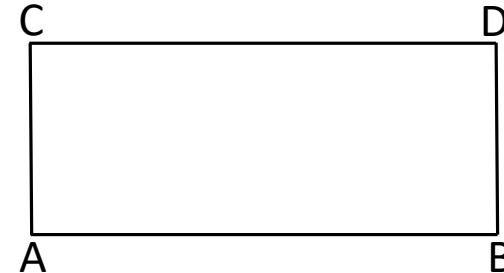
Se su due rette incide una terza retta, che dalla stessa parte forma con la prima un angolo retto e con la seconda uno acuto, la distanza di quelle due rette sarà sempre minore dalla parte dove si trova l'angolo acuto e sempre maggiore dalla parte dove si trova l'angolo ottuso.

Lemma IV:

Se a una retta si erigono due perpendicolari tra loro uguali, i cui estremi sono congiunti da una retta, questa retta formerà un angolo retto con ambedue le perpendicolari.

Seconda dimostrazione

Se \widehat{ACD} e \widehat{BDC} non sono retti, saranno o acuti o ottusi.



Se $\widehat{ACD} < 90^\circ$, le rette CD e AB , se prolungate, convergono dalla parte di B e D .

Quindi $AC > BD$, il che è assurdo perché per ipotesi $AC = BD$.

Una dimostrazione simile si ha se $\widehat{BDC} < 90^\circ$.

Se $\widehat{ACD} > 90^\circ$, le rette CD e AB , se prolungate, divergono dalla parte di B e D .

Quindi $BD > AC$, il che è assurdo perché per ipotesi $AC = BD$.

Una dimostrazione simile si ha se $\widehat{BDC} > 90^\circ$.

Allora $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} = 90^\circ$.

V postulato

1° caso

Si supponga che \widehat{ABD} sia retto e \widehat{BAC} acuto.

Si prenda su AC un punto qualsiasi E e da esso si conduca $EF \perp AB$.

Si prenda $FG = AF$, $GH = AG$, $HI = AH$,

Tale costruzione sia fatta in modo che AF si possa “moltiplicare” tante volte fino a oltrepassare il punto B .

Su AC si prenda $EK = AE$, $KL = AK$, $LC = AL$,

Si conducano le rette KG , LH , CI .

Si prolunghino EF , GK , HL in modo che sia $EM = EF$, $KN = GK$, $LO = HL$.

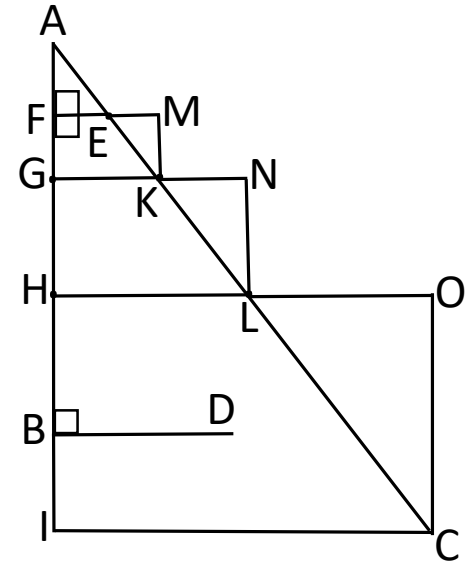
Si congiungano M con K , N con L , O con C .

Si considerino i triangoli AFE ed EMK :

$$AE = EK, \quad FE = EM, \quad \widehat{AEF} = \widehat{KEM}.$$

Allora sarà $MK = AF$ e $\widehat{KME} = \widehat{AFE} = 1R$.

Ma $FG = AF$ per costruzione, quindi $FG = MK$.



Essendo $FG \perp FM$, $MK \perp FM$ e $FG = MK$, per il quarto lemma $\widehat{AGK} = 1R$.

Si considerino i triangoli LKN e AKG :

$$KL = AK,$$

$$KN = KG,$$

$$\widehat{LKN} = \widehat{AKG}.$$

Allora sarà $NL = AG$ e $\widehat{LNK} = \widehat{AGK} = 1R$.

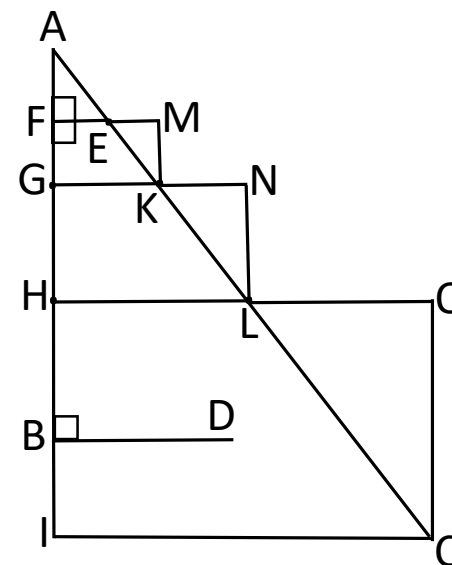
Ma $GH = AG$ per costruzione, quindi $GH = NL$.

Essendo $GH \perp GN$, $NL \perp GN$ e $GH = NL$, per il quarto lemma $\widehat{AHL} = 1R$.

E così per gli altri triangoli.

Per ipotesi $\widehat{ABD} = 1R$, quindi, $IC \parallel BD$.

Perciò, BD , se prolungata, secherà la retta AC al di sopra del punto C .



2° caso

Si supponga che \widehat{ABD} e \widehat{BAC} siano uno acuto e l'altro o acuto o ottuso.

$$\widehat{ABD} + \widehat{BAC} < 2R.$$

Poiché $\widehat{ABD} + \widehat{DBE} = 2R$, si ha: $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} < \widehat{ABD} + \widehat{DBE}$,

da cui si ricava: $\widehat{BAC} < \widehat{DBE}$.

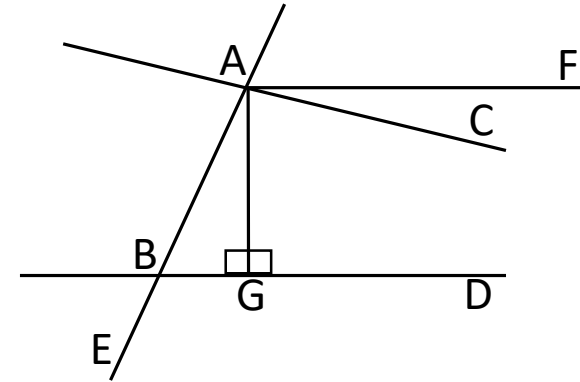
Si costruisca $\widehat{BAF} = \widehat{DBE}$.

Allora $AF \parallel BD$.

Si tracci $AG \perp BD$.

Poiché $AF \parallel BD$, deve essere $\widehat{GAF} = 1R$.

Allora AG , tagliando AC e BD , forma l'angolo \widehat{AGD} retto e l'angolo \widehat{GAC} acuto, per cui AC e BD , se prolungate, concorrono dalla parte di C e D , come si è dimostrato prima.



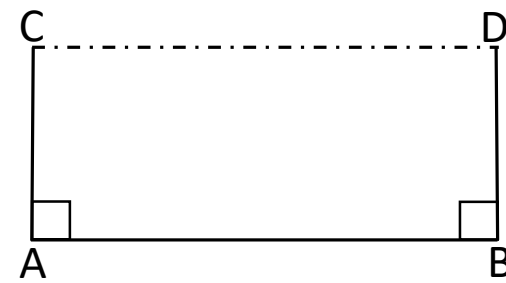
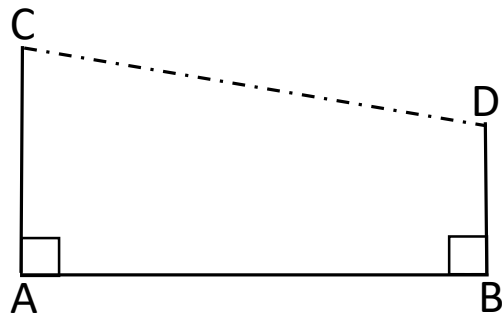
Gerolamo Saccheri (1667-1733)

Logica demonstrativa (1697)

Euclides ab omni naevo vindicatus (1733)

Saccheri segue un procedimento logico differente da quello usato dai suoi predecessori

Articola il suo discorso attorno a una particolare figura: il quadrilatero birettangolo



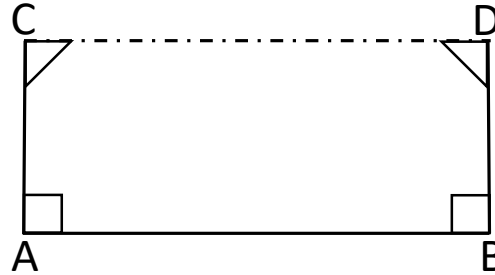
quadrilatero birettangolo isoscele

Prop. I: Sia $ABCD$ un quadrilatero con gli angoli consecutivi A e B retti. Se i lati AC e BD sono uguali, anche l'angolo C è uguale all'angolo D .

$$AC \perp AB$$

$$BD \perp AB$$

$$AC = BD$$



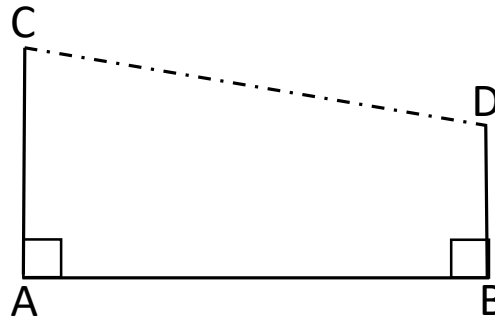
$$\hat{C} = \hat{D}$$

Prop. I: Sia $ABCD$ un quadrilatero con gli angoli consecutivi A e B retti. Se i lati AC e BD sono disuguali, dei due angoli C e D è maggiore quello adiacente al lato minore ed è minore quello adiacente al lato maggiore

$$AC \perp AB$$

$$BD \perp AB$$

$$AC > BD$$



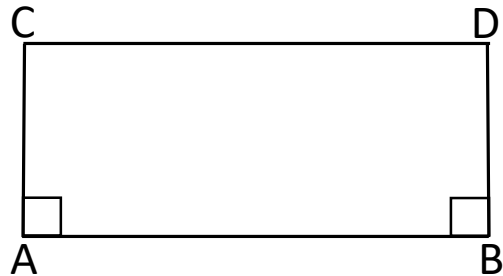
$$\hat{C} < \hat{D}$$

Prop. III: Se due rette uguali AC e BD insistono perpendicolarmente su una qualsiasi retta AB , la congiungente CD sarà rispetto ad AB uguale o minore o maggiore secondo che gli angoli della stessa CD siano retti o ottusi o acuti.

Se $\hat{C} = \hat{D} = 1R$

allora

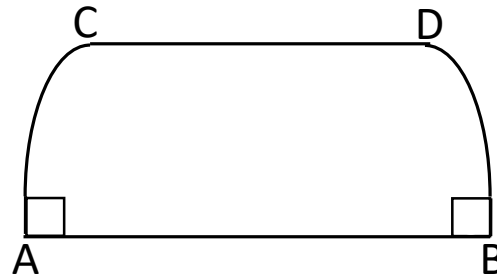
$CD = AB$



Se $\hat{C} = \hat{D} > 1R$

allora

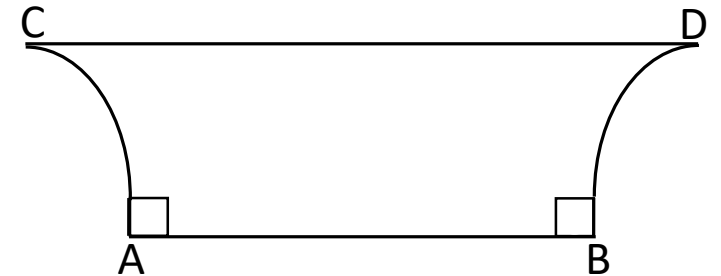
$CD < AB$



Se $\hat{C} = \hat{D} < 1R$

allora

$CD > AB$



Prop. V: Se l'ipotesi dell'angolo retto è vera anche in un solo caso, in ogni caso è sempre la sola vera.

Prop. VI: Se l'ipotesi dell'angolo ottuso è vera anche in un solo caso, in ogni caso è sempre la sola vera.

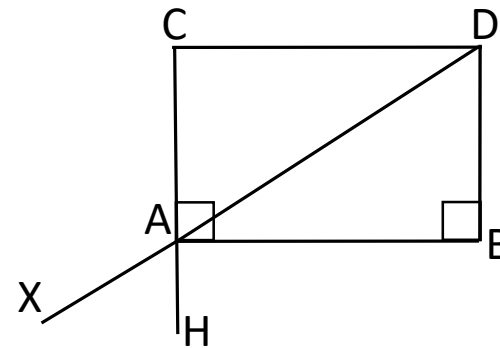
Prop. VII: Se l'ipotesi dell'angolo acuto è vera anche in un solo caso, in ogni caso è sempre la sola vera.

Prop. VIII: Dato un qualsiasi triangolo, rettangolo in B , si prolunghi DA fino al punto X e per A si conduca HAC perpendicolare ad AB in modo che il punto H stia dalla parte dell'angolo XAB . Dico che l'angolo esterno XAH sarà uguale, o minore, o maggiore dell'interno e opposto ADB quando sia vera l'ipotesi dell'angolo retto, o dell'angolo ottuso, o dell'angolo acuto; e reciprocamente.

Ipotesi dell'angolo retto:

$$\widehat{XAH} = \widehat{ADB}$$

In tal caso si ha anche $CD = AB$.

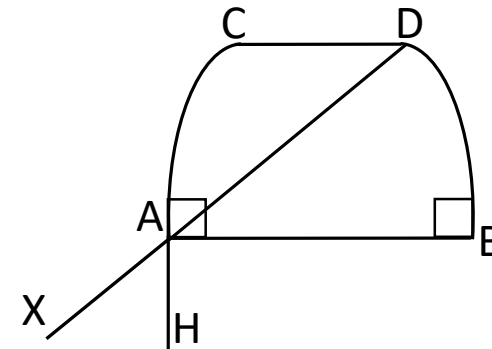


Prop. VIII: Dato un qualsiasi triangolo, rettangolo in B , si prolunghi DA fino al punto X e per A si conduca HAC perpendicolare ad AB in modo che il punto H stia dalla parte dell'angolo XAB . Dico che l'angolo esterno XAH sarà uguale, o minore, o maggiore dell'interno e opposto ADB quando sia vera l'ipotesi dell'angolo retto, o dell'angolo ottuso, o dell'angolo acuto; e reciprocamente.

Ipotesi dell'angolo ottuso:

$$\widehat{XAH} < \widehat{ADB}$$

In tal caso si ha anche $CD < AB$.

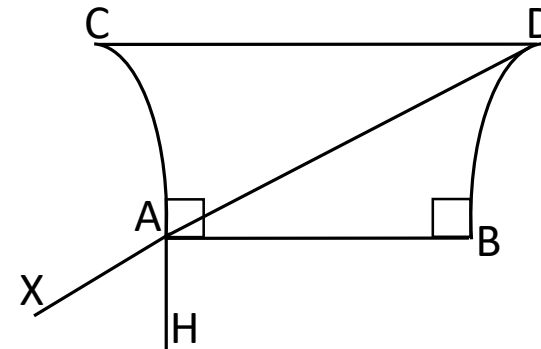


Prop. VIII: Dato un qualsiasi triangolo, rettangolo in B , si prolunghi DA fino al punto X e per A si conduca HAC perpendicolare ad AB in modo che il punto H stia dalla parte dell'angolo XAB . Dico che l'angolo esterno XAH sarà uguale, o minore, o maggiore dell'interno e opposto ADB quando sia vera l'ipotesi dell'angolo retto, o dell'angolo ottuso, o dell'angolo acuto; e reciprocamente.

Ipotesi dell'angolo acuto:

$$\widehat{XAH} > \widehat{ADB}$$

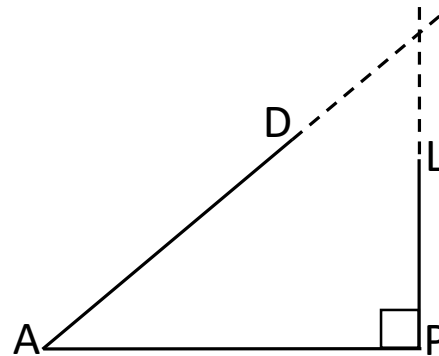
In tal caso si ha anche $CD > AB$.



Prop. IX: In qualsiasi triangolo rettangolo, i residui due angoli acuti, sommati insieme, sono nell'ipotesi dell'angolo retto uguali a un angolo retto; nell'ipotesi dell'angolo ottuso, maggiori di un angolo retto; minori invece nell'ipotesi dell'angolo acuto.

Ipotesi dell'angolo ottuso

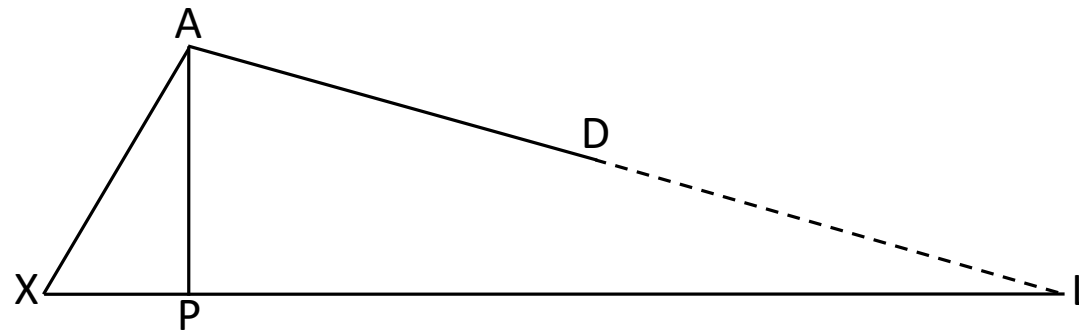
Prop. XI: Intersechi la retta AP (di qualsiasi lunghezza) due rette PL e AD , la prima formando un angolo retto in P , la seconda un qualsiasi angolo acuto in A , convergente dalla stessa parte della stessa PL . Dico che, nell'ipotesi dell'angolo retto, se si prolungano le rette AD e PL da quella parte in cui formano con la base AP angoli insieme minori di due retti, si intersecheranno in un punto a distanza finita o terminata.



Prop. XII: Reciprocamente dico che, anche nell'ipotesi dell'angolo ottuso, la retta AD incontrerà la retta PL dalle medesime parti (e a distanza finita e determinata).

Ipotesi dell'angolo ottuso

Prop. XIII: Se la retta XA , di qualsivoglia designata lunghezza, intersecando le due rette AD e XL , forma con esse, dalla stessa parte, angoli interni XAD e AXL con somma minore di due retti, dico che in entrambe le ipotesi, dell'angolo retto e dell'angolo ottuso, tali due rette (anche se nessuno di quegli angoli è retto) si incontreranno in un punto dalla parte di quegli angoli e a distanza finita e determinata.



Prop. XIV: L'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa perché distrugge se stessa.

Ipotesi dell'angolo acuto

Prop. XXIII

Prop. XXIV

Prop. XXV

Prop. XXXI

Prop. XXXII

Prop. XXXIII

Saccheri si concentra soprattutto su come si comportano le rette nell'ipotesi dell'angolo acuto.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto

esistono una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta che non si incontrano.

Partendo dall'ipotesi dell'angolo acuto, per le coppie di rette nel piano esistono tre possibilità:

- le rette sono incidenti
- le rette non sono incidenti e hanno una perpendicolare comune
- le rette non sono incidenti, non hanno una perpendicolare comune e si avvicinano indefinitamente

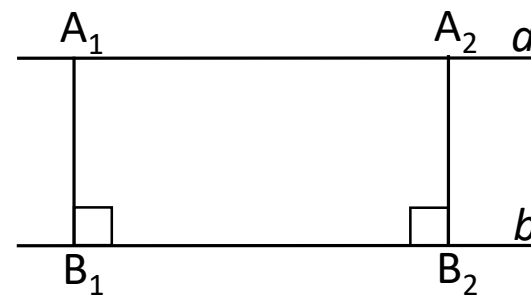
Ipotesi dell'angolo acuto

Siano a e b due rette complanari non incidenti.

Dai punti A_1 e A_2 di a si traccino le perpendicolari A_1B_1 e A_2B_2 su b .

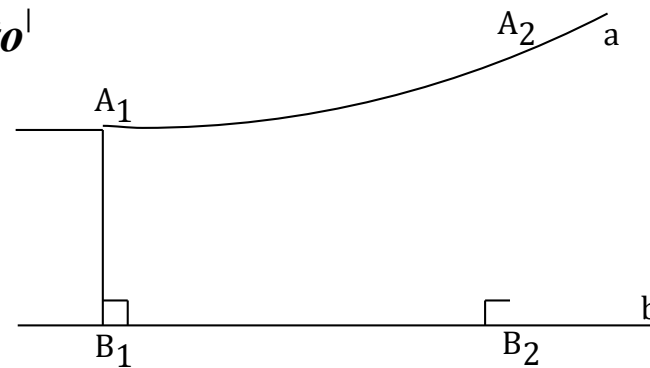
Gli angoli $\widehat{A_1}$ e $\widehat{A_2}$ del quadrilatero ottenuto possono essere:

- 1) uno retto e l'altro acuto
- 2) entrambi acuti
- 3) uno acuto e l'altro ottuso

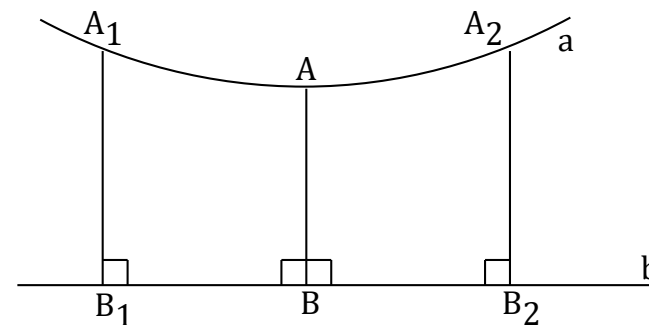


Ipotesi dell'angolo acuto¹

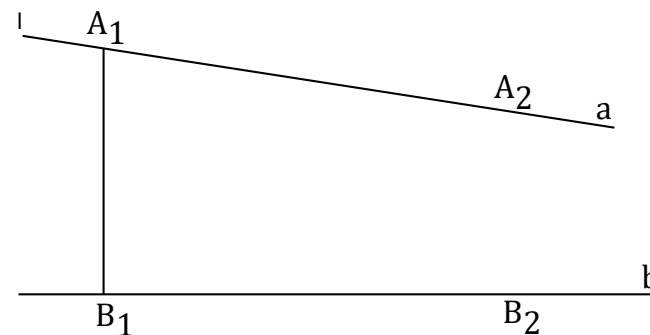
1) Gli angoli \widehat{A}_1 e \widehat{A}_2 sono uno retto e l'altro acuto



1) Gli angoli \widehat{A}_1 e \widehat{A}_2 sono entrambi acuti



1) Gli angoli \widehat{A}_1 e \widehat{A}_2 sono uno acuto e l'altro ottuso



Prop. XXXIII: L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta

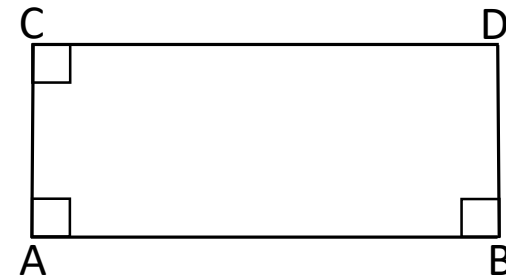
Eugenio Beltrami è il primo italiano che scopre lo scritto di Saccheri

Nel suo articolo *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewskj* (1889) valuta l'opera di Saccheri come quella di colui che ha preceduto le rivoluzioni geometriche dell'Ottocento in rapporto alle teorie delle parallele.

Lo scritto di Saccheri è presentato da **Georg Simon Klügel** nel volume *Recensione dei principali tentativi di dimostrare la teoria delle parallele* (1764).

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), scrive *La teoria delle parallele*, pubblicata nel 1786, dopo la sua morte.

- 1) $\widehat{D} = 1R$ (ipotesi dell'angolo retto),
- 2) $\widehat{D} > 1R$ (ipotesi dell'angolo ottuso),
- 3) $\widehat{D} < 1R$ (ipotesi dell'angolo acuto).



quadrilatero trirettangolo

Geometrie non euclidee

Per venti secoli, gli sforzi per risolvere il “problema delle parallele” non ebbero frutti.

L’interesse per questo argomento continuò a rimanere vivo e portò alla scoperta di nuovi sistemi geometrici.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Chiara visione di una geometria indipendente dal V postulato.

W. Bolyai

Albers

Schumacher

Gerling

Taurinus

Bessel

.....

due piccole note

alcuni appunti

geometria anti-euclidea (lettera di Wachter)

geometria astrale (seguendo Schweikart)

geometria non-euclidea (lettera a Schumacher)

In una lettera a Wolfgang Bolyai (1799) Gauss scrive che sta pensando molto all'ipotesi che la somma degli angoli interni di un triangolo sia minore di due retti e che sta elaborando cose molto interessanti nella "sua testa".

In una lettera a Taurinus (1824) consiglia a quest'ultimo di non divulgare le proprie elaborazioni.

In due lettere a Bessel (del 1829 e del 1830) scrive che non pubblica nulla dei suoi pensieri sulla nuova geometria perché teme "*gli strilli dei Beoti*".

Nella nuova geometria viene a mancare la relazione tra discorso geometrico e realtà.

In una delle sei lettere tra Gauss e Schumacher (scritte tra il 1831 e il 1846) Gauss scrive che nella geometria non euclidea che sta considerando non trova alcuna contraddizione.

Janoš Bolyai (1802-1860)

*Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, e indipendente dalla verità dell'assioma 11° di Euclide
(quello sulle parallele) giammai da potersi decidere a priori*

in appendice al *Tentativo di dare suggerimenti per un migliore insegnamento dell'aritmetica e della geometria*
scritto dal padre Wolfgang e pubblicato nel 1832.

Nicolaj Ivanovich Lobačevskij (1793-1856)

Esposizione succinta dei principi della geometria con una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele (1826)

Sui fondamenti della geometria (1829-30)

Geometria immaginaria (1835)

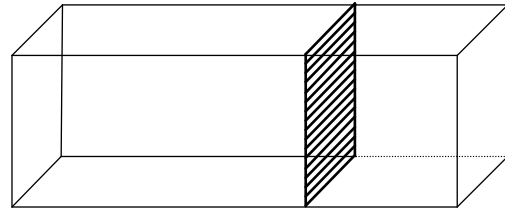
Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele (1835)

Studi geometrici con una teoria completa delle parallele (1840)

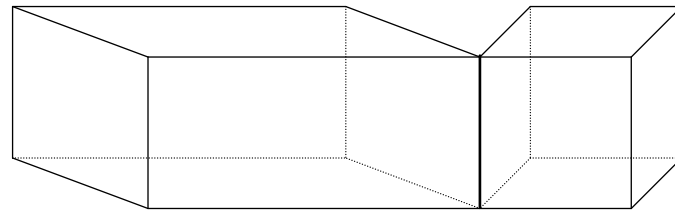
Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele (1855)

Lobacevskij, nel presentare la sua geometria, parte dai corpi tridimensionali.

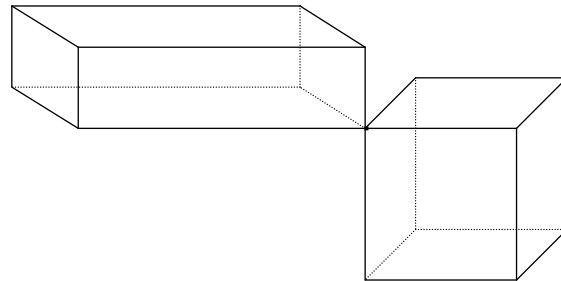
Introduce il concetto di *contatto* fra due corpi mediante il quale e per mezzo di un'operazione di astrazione ottiene la superficie, la retta e il punto.



concetto di superficie



concetto di retta



concetto di punto

Postulati della geometria di Lobacevskij

- I di Euclide
- II di Euclide
- III di Euclide
- IV di Euclide
- V di Lobacevskij

V postulato: Data una retta e un punto fuori di essa, per questo punto passano due rette parallele alla retta data.

Consideriamo su un piano una retta r e un punto P fuori di essa.

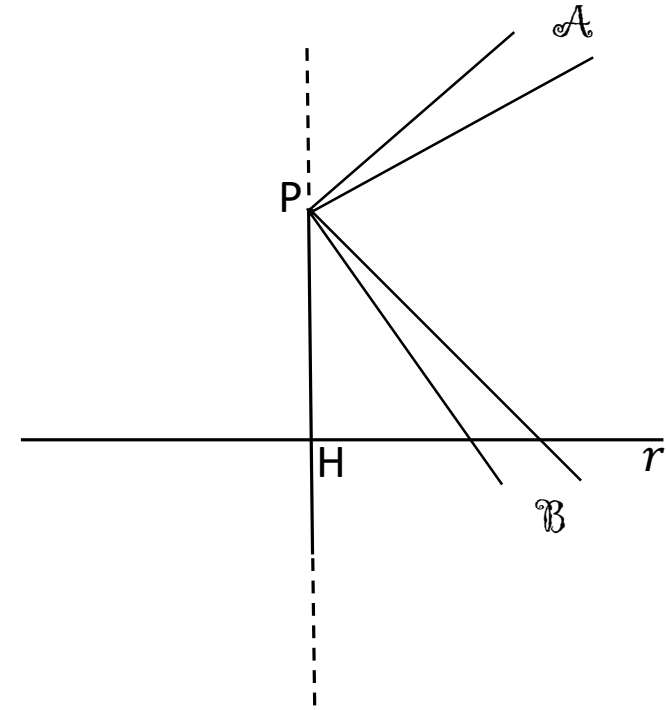
Dal punto P tracciamo la perpendicolare a r che la incontri nel punto H .

Fermiamo l'attenzione su uno dei due semipiani.

Dal punto P escono infinite rette che giacciono su questo semipiano.

Indichiamo con \mathcal{A} l'insieme delle rette divergenti da r

e con \mathcal{B} l'insieme delle rette convergenti con r .

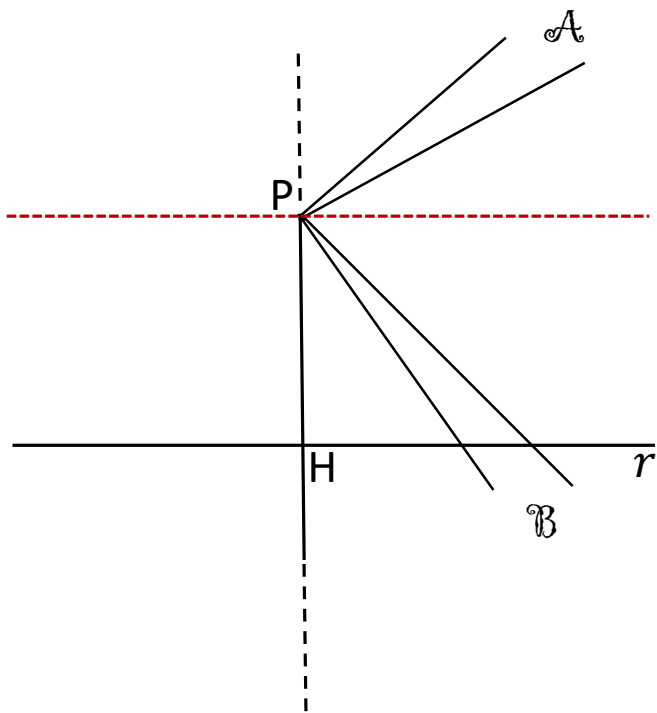


Per Lobacevskij esiste un elemento di separazione tra le rette che intersecano r e quelle che non la intersecano.

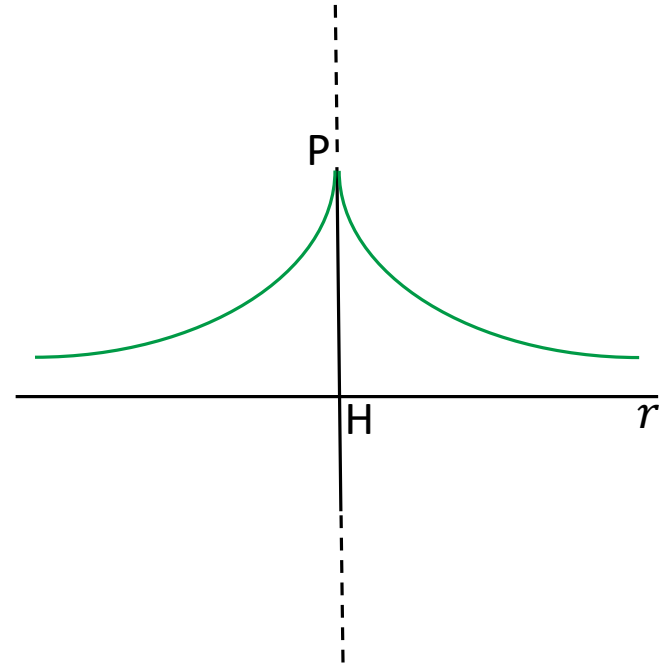
Lobacevskij chiama “parallela” tale elemento di separazione

Ripetendo il discorso per l'altro semipiano, si trova un altro elemento di separazione, ossia un'altra parallela.

Quindi esistono due rette parallele alla retta data r passanti per il punto P .



?



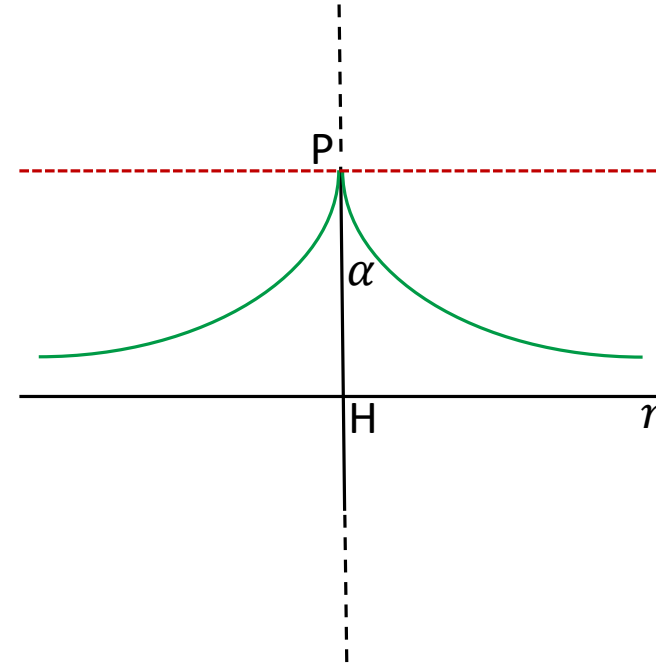
con una forzatura “immaginativa”

PH è detta “distanza di parallelismo”

α è detto “angolo di parallelismo”

Se PH tende a 0, allora α tende a $\frac{\pi}{2}$.

Se PH tende a ∞ , allora α tende a 0.



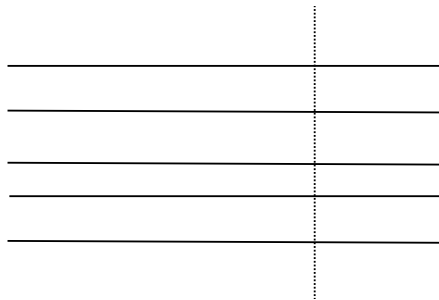
Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si ha la geometria euclidea

(una “geometria limite” rispetto a quella di Lobatchevski)

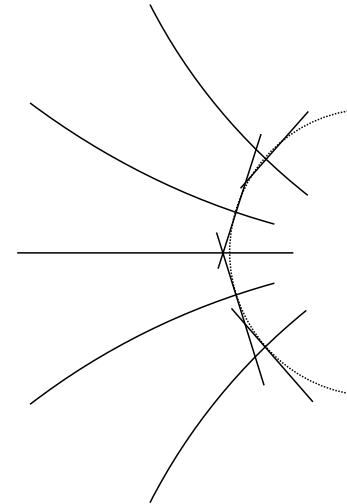
Una parte importante della *Geometria immaginaria* è la costruzione delle formule trigonometriche

L'**orliccio** è la traiettoria ortogonale di un fascio di rette parallele

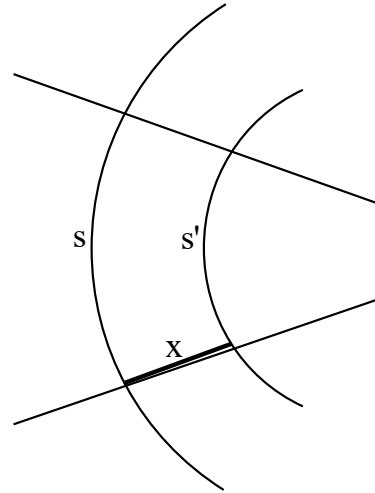
geometria di Euclide



geometria di Lobacevskij



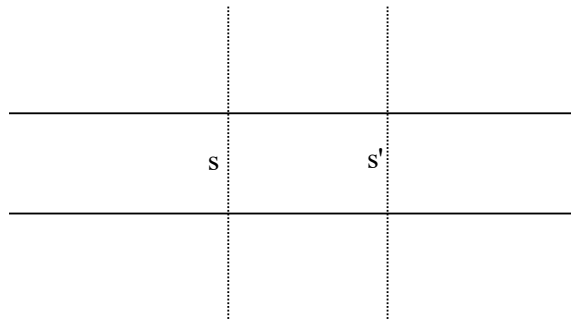
Dati due oriccioli relativi a uno stesso fascio di rette parallele, il rapporto fra due archi di questi, compresi fra due parallele del fascio, dipende dalla loro distanza x :



$$\frac{s}{s'} = q^x \quad (q \text{ è una costante})$$

geometria di Euclide

$$q = 1 \quad s = s'$$

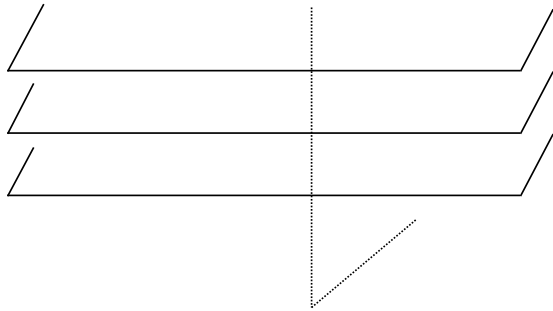


geometria di Lobacevskij

$$q > 1$$

L'**orisfera** è una superficie ortogonale a un fascio di piani paralleli

geometria di Euclide



questa superficie è un piano

geometria di Lobacevskij

questa superficie è una sfera di raggio infinito

Teorema I

In ogni triangolo la somma degli angoli interni non può superare π , cioè $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Supponiamo per assurdo che sia $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \delta$, $\delta > 0$.

Sia D il punto medio di AB e congiungiamo C con D .

Prolunghiamo CD fino al punto E in modo che sia $CD = DE$.

Congiungiamo E con B .

Consideriamo i triangoli ADC e DEB :

$$AD = DB \quad CD = DE \quad \widehat{ADC} = \widehat{EDB}$$

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

Sia F il punto medio di DB e congiungiamo C con F .

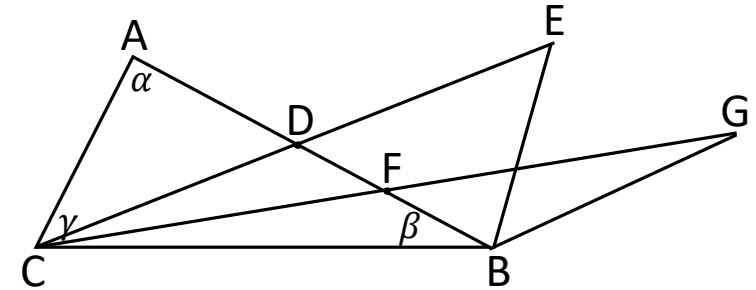
Prolunghiamo CF fino al punto G in modo che sia $CF = FG$.

Congiungiamo G con B .

Consideriamo i triangoli CDF e FGB :

$$DF = FB \quad CF = FG \quad \widehat{DFC} = \widehat{GFB}$$

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.



Teorema I

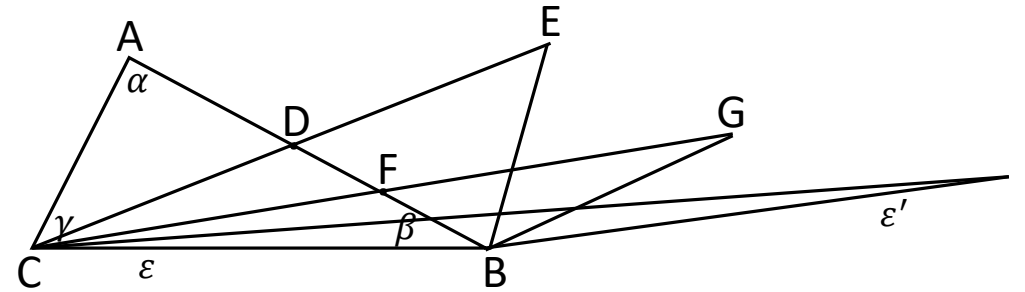
In ogni triangolo la somma degli angoli interni non può superare π , cioè $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Dopo un certo numero di passi

possiamo individuare due angoli acuti ε ed ε' tali che

$$\varepsilon < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon' < \frac{\delta}{2}$$

cioè tali che $\varepsilon + \varepsilon' < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$



Sommando gli angoli interni dell'ultimo triangolo otteniamo

$$\varepsilon + \varepsilon' + \hat{B} = \pi + \delta$$

da cui ricaviamo $\hat{B} = \pi + \delta - (\varepsilon + \varepsilon')$ dove $\varepsilon + \varepsilon' < \delta$

Poniamo $\delta - (\varepsilon + \varepsilon') = \lambda > 0$.

Allora $\hat{B} = \pi + \lambda$.

Questo è assurdo, quindi non è possibile che la somma degli angoli interni sia uguale a $\pi + \delta$.

Teorema II

In tutti i triangoli, o la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale a π , oppure è sempre minore di π .

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC .

Supponiamo che sia $\alpha + \beta + \hat{C} = \pi$.

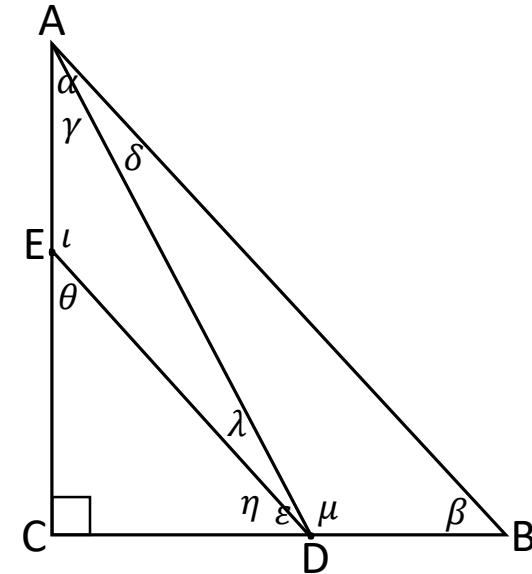
Poiché il triangolo è rettangolo in C , allora $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Sia D un punto qualunque su CB ; congiungiamo D con A .

Allora $\hat{A} = \alpha = \gamma + \delta$ e $\hat{D} = \mu + \varepsilon = \pi$

Sia E un punto qualunque su AC ; congiungiamo E con D .

Allora $\varepsilon = \lambda + \eta$ e $\hat{E} = \iota + \theta = \pi$



Sappiamo che:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta + \eta = \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo il triangolo ADB :

$$\delta + \mu + \beta = (\alpha - \gamma) + (\pi - \varepsilon) + \beta = \pi + (\alpha + \beta) - (\gamma + \varepsilon) = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Allo stesso modo, nel triangolo ADE si ha:

$$\gamma + \iota + \lambda = \gamma + (\pi - \theta) + (\varepsilon - \eta) = \pi + (\gamma + \varepsilon) - (\theta + \eta) = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Teorema II

In tutti i triangoli, o la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale a π , oppure è sempre minore di π .

Supponiamo ora che sia $\alpha + \beta + \hat{C} < \pi$.

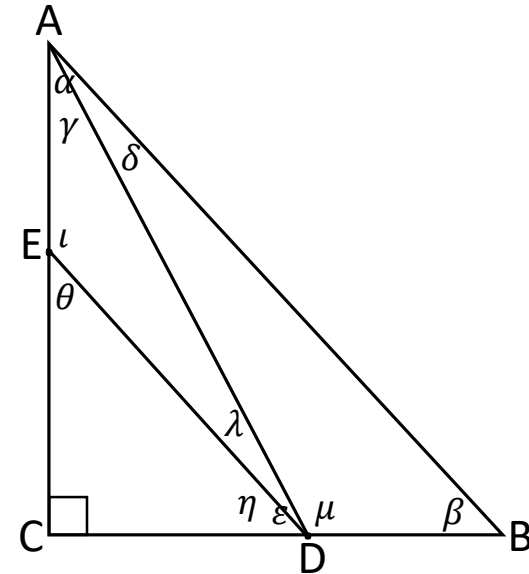
Ripetiamo la costruzione precedente.

Sappiamo che:

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$\theta + \eta < \frac{\pi}{2}$$



Consideriamo il triangolo ADB :

$$\delta + \mu + \beta = (\alpha - \gamma) + (\pi - \varepsilon) + \beta = \pi + (\alpha + \beta) - (\gamma + \varepsilon) < \pi$$

Allo stesso modo, nel triangolo ADE si ha:

$$\gamma + \iota + \lambda = \gamma + (\pi - \theta) + (\varepsilon - \eta) = \pi + (\gamma + \varepsilon) - (\theta + \eta) < \pi$$

Bernard Riemann (1826-1866)

Sulle ipotesi che stanno alla base della Geometria (1854) pubblicata nel 1868

Postulati della geometria di Riemann

- I di Euclide
- II di Riemann
- III di Euclide
- IV di Euclide
- V di Riemann

II postulato: La linea retta ha lunghezza finita.

V postulato: Data una retta e un punto fuori di essa, per questo punto non esiste alcuna retta parallela alla retta data.

Geometria su una superficie

Possiamo costruire una “geometria su una superficie” che consideriamo per regioni convenientemente limitate.

piano

superficie

retta

geodetica

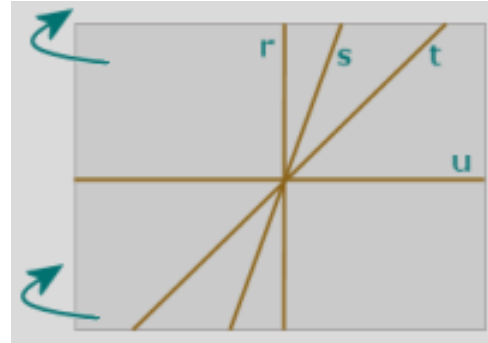
segmento

arco di geodetica

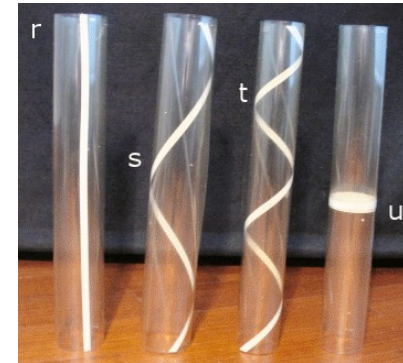
Consideriamo uguali (geodeticamente), sopra una superficie, due figure tracciate su di essa che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

Geodetiche sulla superficie cilindrica

Tracciamo alcune rette su un lucido



Arrotoliamo il lucido orizzontalmente in modo che il foglio si sovrapponga più volte su se stesso.

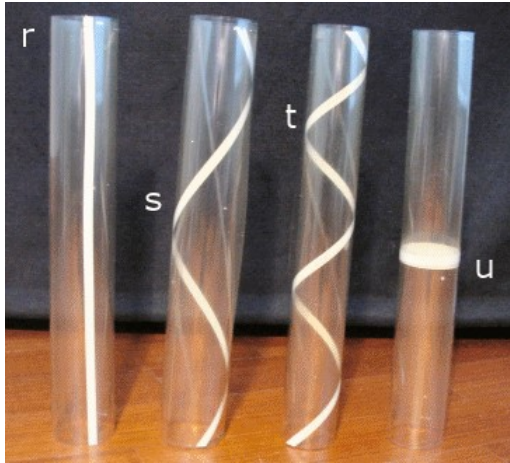


Come vediamo le linee rette della superficie piana del lucido sulla superficie del cilindro?

Tracciamo una retta su un lucido e due punti A e B su di essa



La distanza tra A e B cambia quando la retta si arrotola sul cilindro?

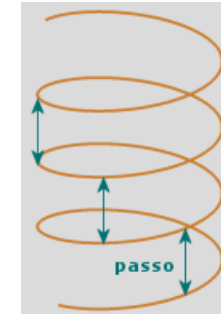


Le linee curve r , s , t , u si chiamano *eliche circolari*

r è una retta generatrice del cilindro

u è una circonferenza che si trova su un piano perpendicolare all'asse del cilindro

Le eliche in figura hanno “passo” diverso

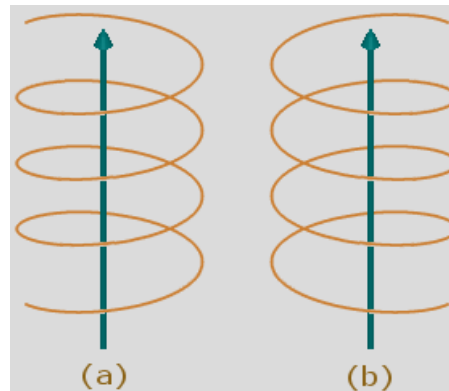


Quante linee geodetiche passano per due punti distinti P e Q ?

r ha passo infinito

u ha passo 0

Arrotolando il lucido nell'altro modo possibile (ribaltando il foglio prima di arrotolarlo) cambia la geodetica?



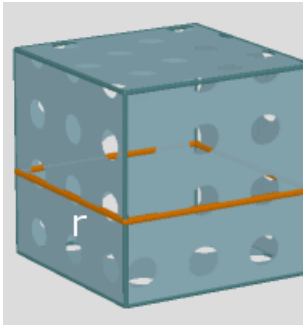
Geodetiche su una scatola

Su ogni faccia di una scatola cosa sono gli archi geodetici?

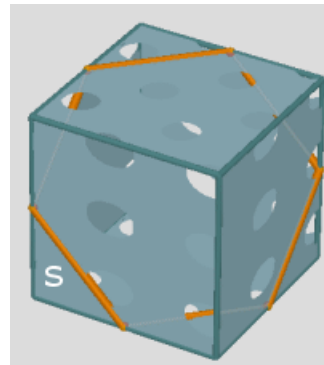
Un essere bidimensionale che si muove sulla scatola come vede le geodetiche?

Sviluppiamo un cubo su un piano

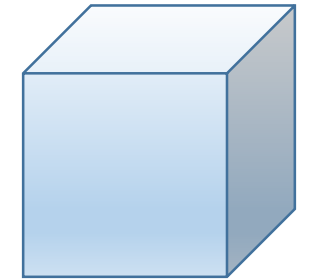
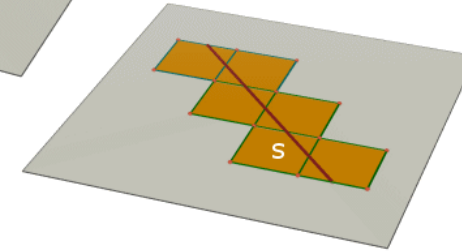
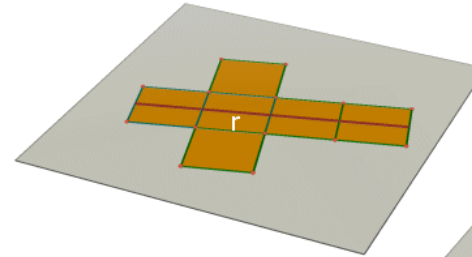
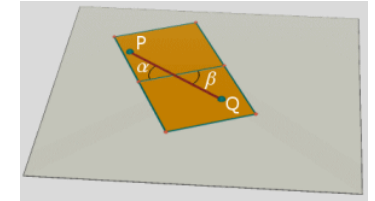
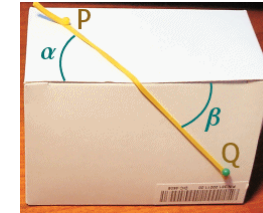
I segmenti r e s , quando il cubo è assemblato nello spazio, diventano due geodetiche. Come ci appaiono?



Come un quadrato

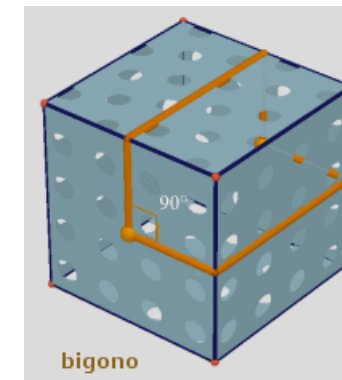


Come un esagono regolare



Nel piano euclideo esistono poligoni con due lati?

Su una scatola esistono poligoni con due lati?



Due porzioni di superfici applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno una geometria analoga.

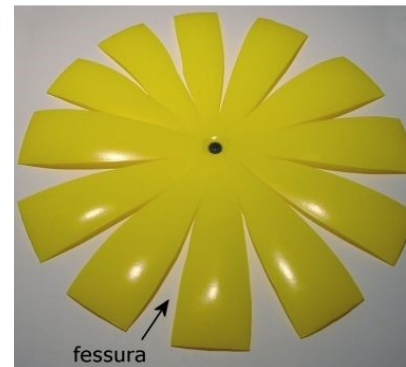
Esempio

Una superficie cilindrica non si può applicare su una superficie piana.

Una porzione di superficie cilindrica si può applicare su una porzione di superficie piana.

Una superficie sferica non si può applicare su una superficie piana.

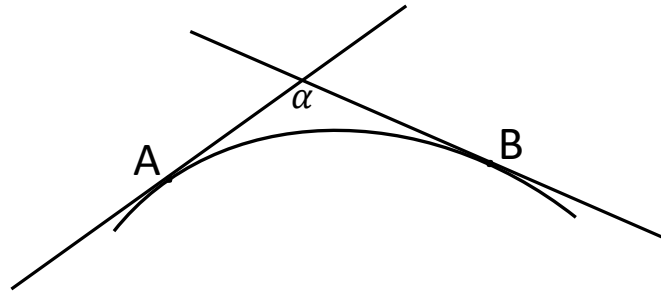
Una porzione di superficie sferica non si può applicare su una porzione di superficie piana.



Curvatura di una linea piana

Si chiama *curvatura media di un arco di curva piana* il rapporto tra l'angolo formato dalle tangenti nei suoi estremi e la lunghezza dell'arco stesso.

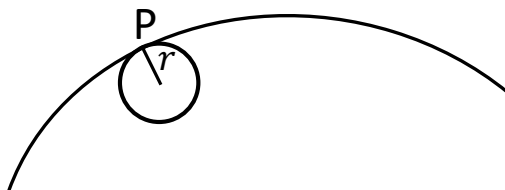
$$k_{media} = \frac{\alpha}{\widehat{AB}}$$



La curvatura di una curva in un punto è il limite a cui tende la curvatura media di un suo arco quando gli estremi dell'arco si avvicinano indefinitamente al punto considerato.

Curvatura di una linea piana

In un intorno infinitamente piccolo di un punto, si identifica un arco di curva con un arco di un opportuno cerchio detto *cerchio osculatore* o *cerchio di curvatura* della curva nel punto considerato.



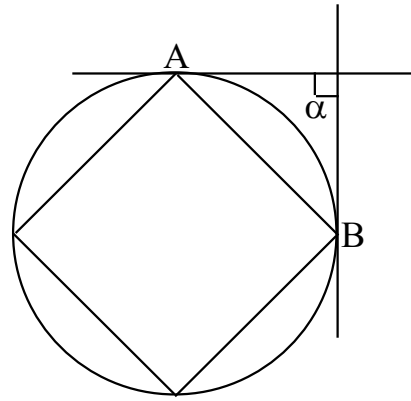
Il raggio e il centro di tale cerchio sono detti rispettivamente *raggio* e *centro di curvatura*.

La *curvatura di una linea (piana) in un punto* è l'inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto:

$$k = \frac{1}{r}$$

Esempio

La curvatura di una circonferenza assume lo stesso valore in ogni punto:



$$k = k_{media} = \frac{1}{r}$$

Curvatura di una superficie

Per un punto P di una superficie tracciamo la normale n alla superficie stessa.

Consideriamo il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve che esso taglia sulla superficie.

Tra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro che hanno, nel punto P , l'una raggio di curvatura massimo e l'altra raggio di curvatura minimo:

esse si dicono *sezioni principali*,

i raggi di curvatura r_1 e r_2 di queste due sezioni sono detti *raggi principali di curvatura*,

i rapporti $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ prendono il nome di *curvature principali* della superficie.

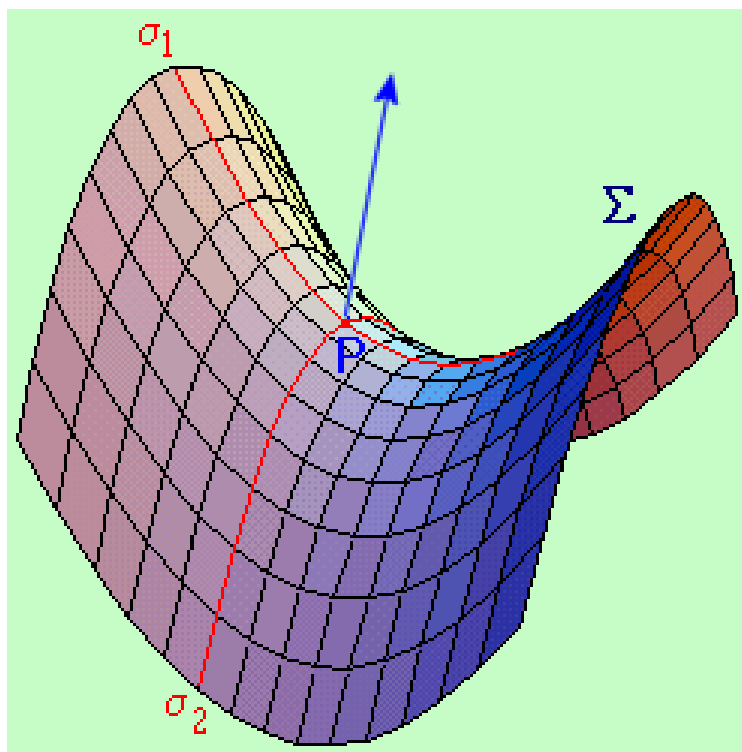
Il prodotto delle curvature principali è noto come *curvatura totale o di Gauss* della superficie nel punto P :

$$k = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2}$$

Esempio

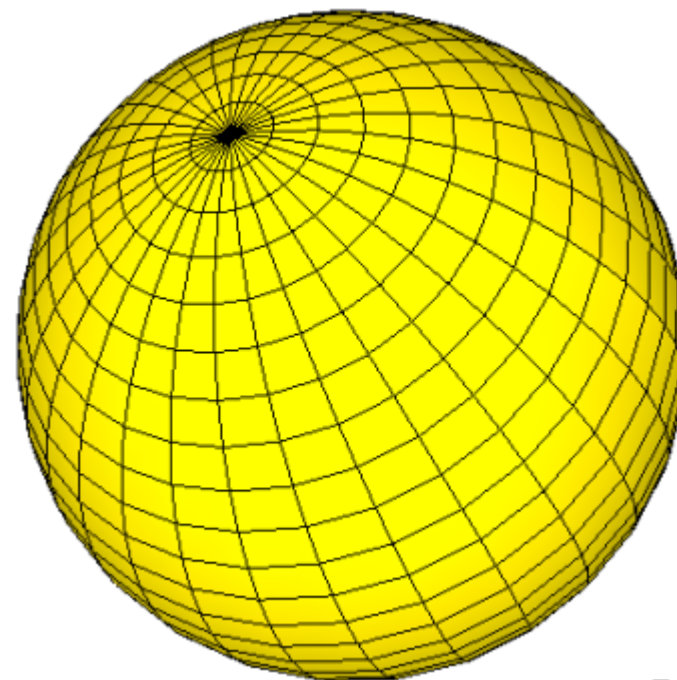
Per la sfera, poiché $r_1 = r_2 = r$, la curvatura è sempre uguale:

$$k = \frac{1}{r^2}$$



Le sezioni normali per P volgono la concavità sia da una parte che dall'altra rispetto alla normale

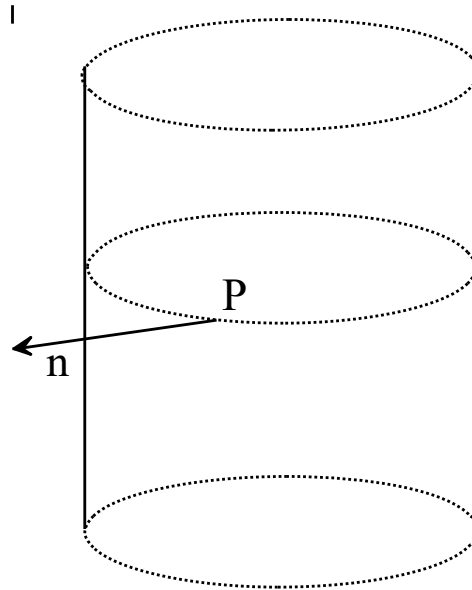
$$k < 0$$



Le sezioni normali per P volgono la concavità dalla stessa parte rispetto alla normale

$$k > 0$$

Consideriamo un cilindro (senza basi) e due sezioni normali ortogonali per P :

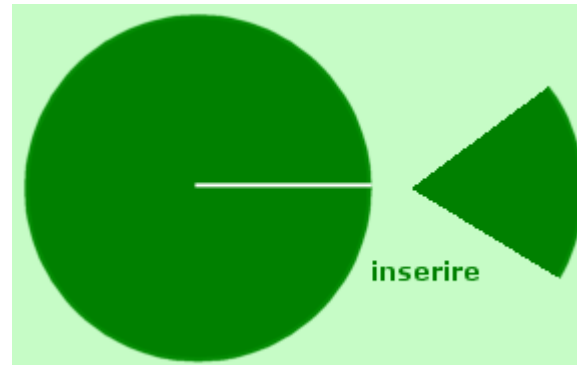


la sezione orizzontale è una circonferenza di curvatura massima k_1

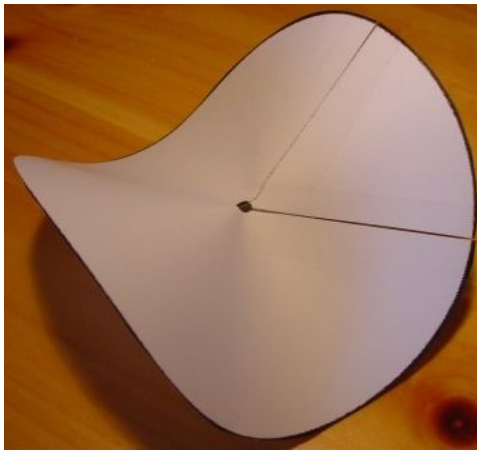
la sezione verticale è una retta e ha curvatura minima $k_2 = 0$

La curvatura della superficie in P è: $k = k_1 \cdot k_2 = 0$

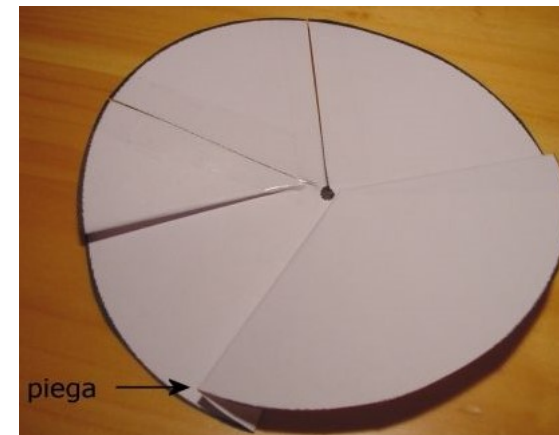
Costruiamo un modello di superficie a sella.

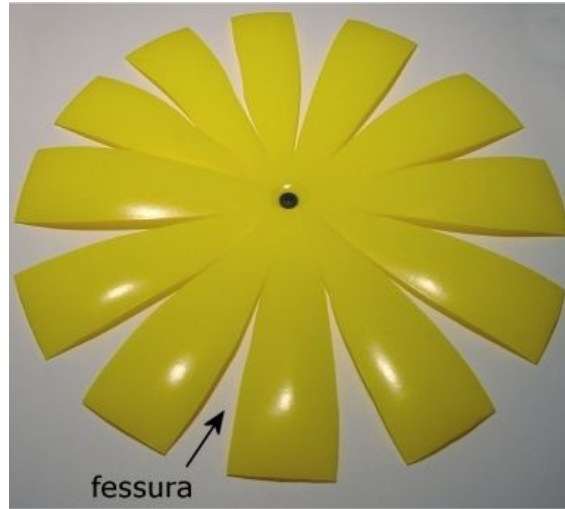


Questa operazione di inserimento non è possibile se si rimane nel piano, ma possiamo farla se flettiamo la superficie.



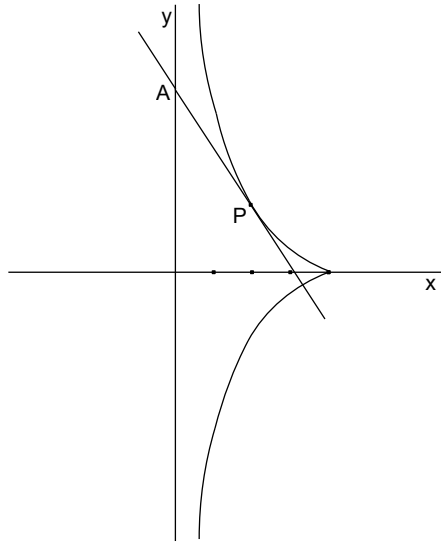
Una sella invade più superficie di quanta possa stare nel piano .





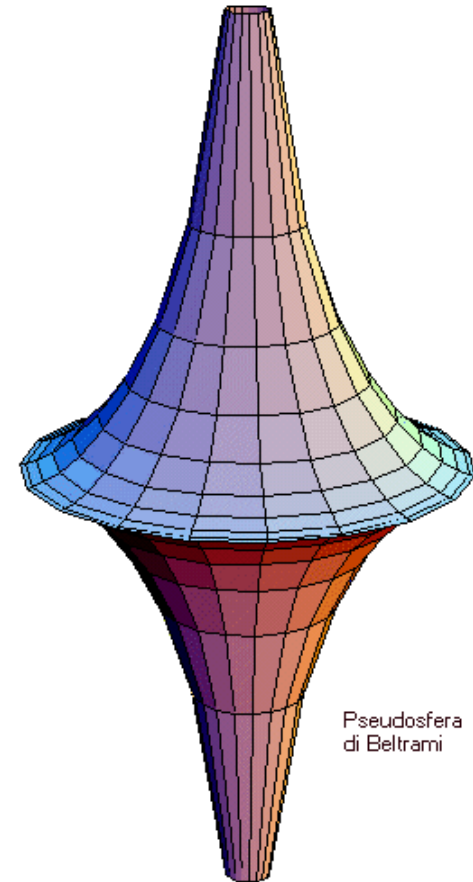
La sfera ha meno superficie di quanta ne serve per schiacciarla sul piano

Consideriamo una “trattrice” in un piano cartesiano.



$$PA = \text{costante}$$

Se facciamo ruotare una trattrice attorno al suo asintoto otteniamo un solido di rotazione che si chiama “pseudosfera”.



Pseudosfera
di Beltrami

Riemann si rende conto che si sta allontanando dalla concezione kantiana quando introduce il concetto di
varietà pluridimensionale

Il punto in cui Riemann si stacca completamente dalla visione kantiana dello spazio è quello in cui considera un triangolo differenziale ed enuncia che la sua area è legata alla somma degli angoli interni dalla relazione:

$$A = \frac{1}{k} [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$$

dove k è la “curvatura” (gaussiana) della superficie.

Consideriamo la relazione $Ak = [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$

Se $k = 0$, allora $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (geometria di Euclide)

Se $k < 0$, poiché $A > 0$, deve essere $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ (geometria di Lobacevskij)

Se $k > 0$, poiché $A > 0$, deve essere $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ (geometria di Riemann)

Un precedente si trova in una memoria di Gauss del 1825.

Gauss dimostrò che sopra una superficie a curvatura k ,

$$\iint_{\sigma} k d\sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

dove α , β , γ sono gli angoli interni del triangolo infinitesimale σ

$$\iint_{\sigma} k d\sigma = k \iint_{\sigma} d\sigma = kA$$

$$Ak = [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$$

Hermann von Helmholtz

Sui fatti che stanno a fondamento della geometria (1868)

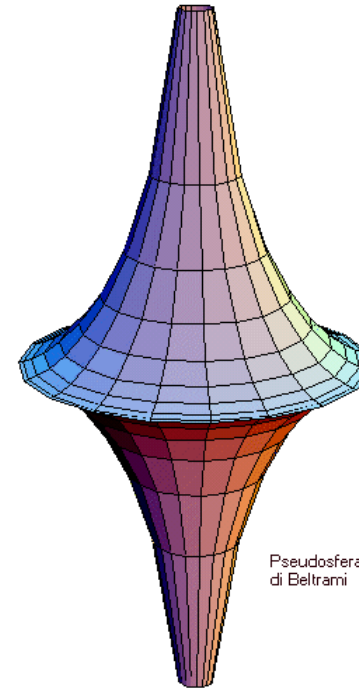
Sull'origine del significato degli assiomi geometrici (1870)

I modelli classici delle geometrie non euclidee

Eugenio Beltrami (1835 – 1900)

Saggio di interpretazione della geometria non euclidea pubblicato nel 1868

Beltrami dimostra che la curvatura della *pseudosfera* è negativa.



Felix Klein (1849 – 1925)

Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti (1872)

Programma di Erlangen

Considera per ogni geometria un gruppo di “trasformazioni” che fanno corrispondere punti a punti, rette a rette, piani a piani.

Le proprietà di ogni geometria sono gli “invarianti” rispetto a quel gruppo di trasformazioni.

Classifica la geometria euclidea e quelle non euclidee da un punto di vista proiettivo e dà un nuovo nome a queste geometrie.

Alla parabola associa la geometria euclidea, che è detta “geometria parabolica”.

All’iperbole associa la geometria di Lobačevskij, che è detta “geometria iperbolica”.

All’ellisse associa la geometria di Riemann, che è detta “geometria ellittica”.

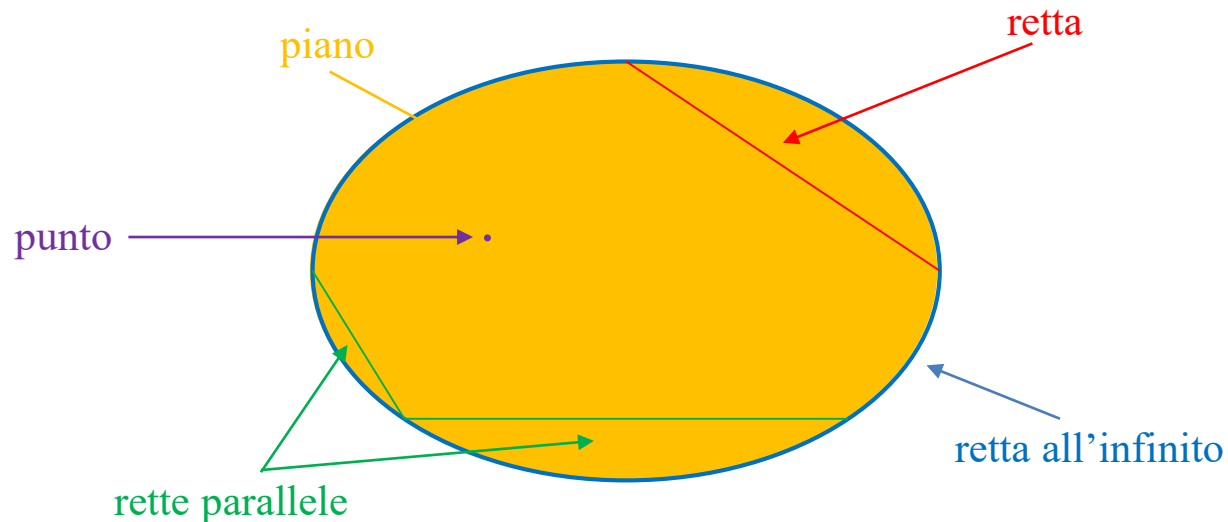
Il modello di Klein per la geometria iperbolica

Klein considera una conica qualunque e la regione di piano euclideo da essa racchiusa.

PIANO: regione dei punti interni alla conica.

RETTA: una corda della conica (esclusi gli estremi).

PUNTO: un punto interno alla conica.



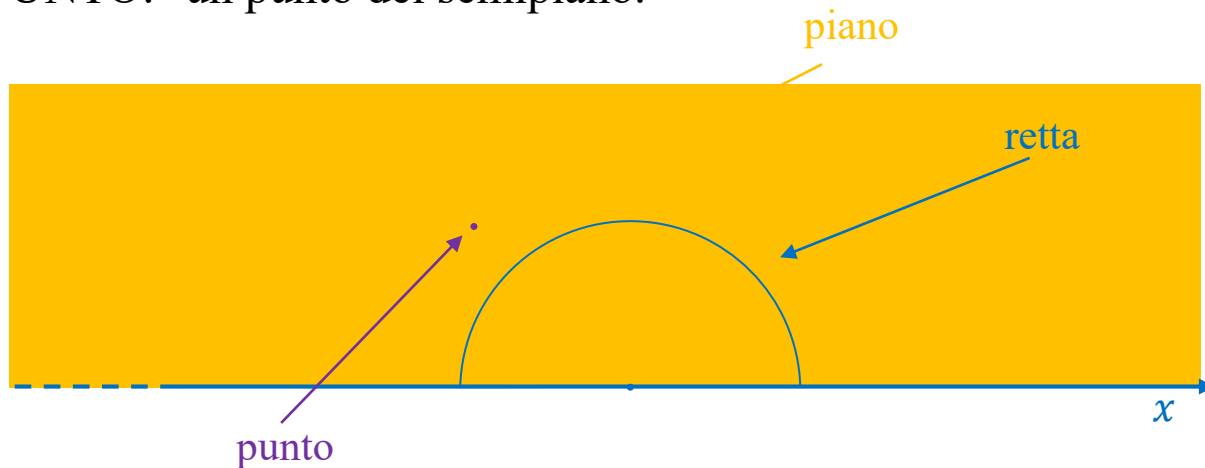
Il modello di Poincaré per la geometria iperbolica

Poincaré divide il piano in due semipiani e ne considera uno.

PIANO: un semipiano, esclusa la retta x .

RETTA: una semicirconferenza con centro sulla retta x .

PUNTO: un punto del semipiano.



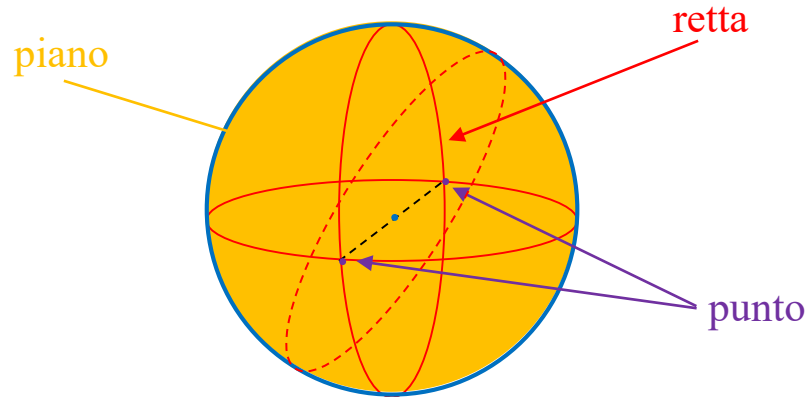
Un modello della geometria ellittica

Consideriamo una sfera.

PIANO: la superficie sferica

RETTA: una circonferenza massima

PUNTO: una coppia di punti diametralmente opposti



La geometria di una superficie a curvatura costante (positiva o negativa) non rispecchia, in generale, l'intera geometria non-euclidea del piano di Lobacevskij o di Riemann.

Teorema di Hilbert

Non esiste alcuna superficie regolare su cui valga nella sua integrità (cioè nella sua completezza) la geometria di Lobačevskij.

Teorema di Liebmann

Una superficie su cui valesse nella sua integrità (cioè nella sua completezza) la geometria di Riemann dovrebbe essere necessariamente chiusa. L'unica superficie regolare chiusa a curvatura costante positiva è la sfera.

**Valori approssimati
di $\sqrt{2}$**

n	$m^2 = 2n^2 + 1$	$m^2 = 2n^2 - 1$	m	$\sqrt{2}$	appross.
1	$m^2 = 3$	$m^2 = 1$	1	$\frac{1}{1}$	per difetto
2	$m^2 = 9$	$m^2 = 7$	3	$\frac{3}{2}$	per eccesso
3	$m^2 = 19$	$m^2 = 17$			
4	$m^2 = 33$	$m^2 = 31$			
5	$m^2 = 51$	$m^2 = 49$	7	$\frac{7}{5}$	per difetto
6	$m^2 = 73$	$m^2 = 71$			
7	$m^2 = 99$	$m^2 = 97$			
8	$m^2 = 129$	$m^2 = 127$			
9	$m^2 = 163$	$m^2 = 161$			
10	$m^2 = 201$	$m^2 = 199$			
11	$m^2 = 243$	$m^2 = 241$			
12	$m^2 = 289$	$m^2 = 287$	17	$\frac{17}{12}$	per eccesso

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
m	1	3			7							17	...

Se indichiamo con N e M i valori da trovare e con n e m quelli conosciuti, allora

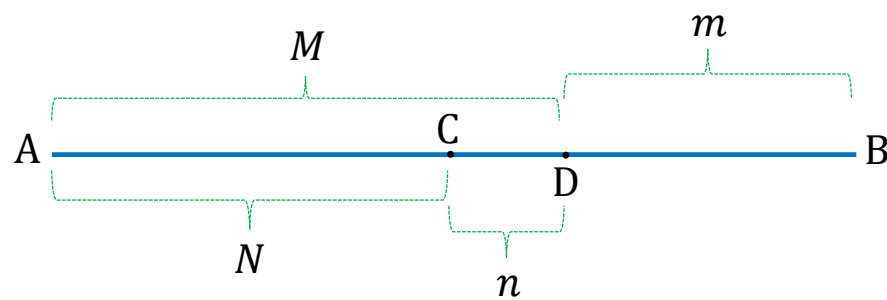
$$\begin{cases} N = n + m \\ M = 2n + m \end{cases}$$

n	1	2	5	12	29	70	...
m	1	3	7	17	41	99	...

Una traccia di questo procedimento si trova nell'*Esposizione delle conoscenze matematiche utili per la lettura di Platone* di Teone da Smirne e nel *Commento alla Repubblica di Platone* di Proclo.

Una traccia di natura geometrica si trova nelle propp. II,9 e II,10 degli *Elementi* di Euclide.

Prop. II, 9: Se si divide una linea retta in parti uguali e disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è il doppio della somma del quadrato della metà della retta e del quadrato della parte compresa fra i punti di divisione.



$$AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$

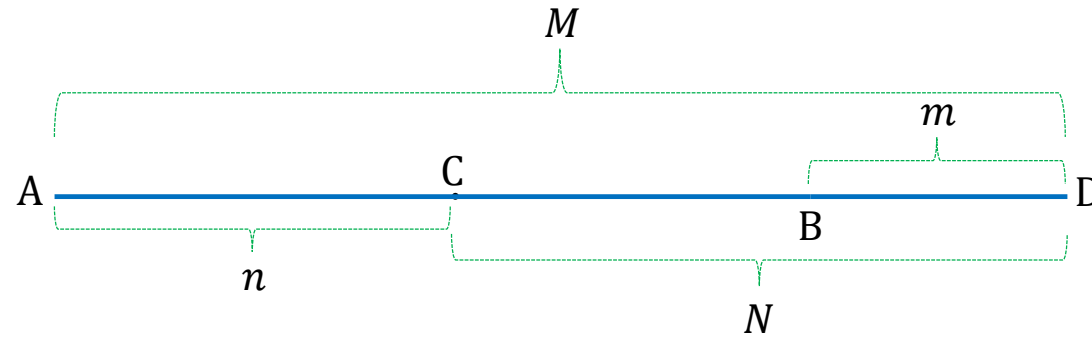
Se poniamo $AD = M$ $DB = m$ $AC = N$ $CD = n$

$$M^2 + m^2 = 2(N^2 + n^2)$$

$$M = AD = AC + CD = CB + CD = (CD + DB) + CD = 2CD + DB = 2n + m$$

$$N = AC = CB = CD + DB = n + m$$

Prop. II, 10: Se si divide per metà una linea retta e un'altra le è aggiunta per diritto, il quadrato di tutta la prima retta più quella aggiunta e il quadrato della retta aggiunta, presi ambedue insieme, sono il doppio della somma del quadrato della metà della prima retta e del quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla retta composta dalla metà della prima e da quella aggiunta.



$$(AB + BD)^2 + BD^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$

Se poniamo $AD = M$ $DB = m$ $AC = n$ $CD = N$

$$M^2 + m^2 = 2(n^2 + N^2)$$

$$M = AD = AC + CD = AC + (CB + BD) = AC + (AC + BD) = 2AC + BD = 2n + m$$

$$N = CD = CB + BD = AC + BD = n + m$$

**Valori approssimati
di $\sqrt{3}$**

n	$m^2 = 3n^2 + 1$	$m^2 = 3n^2 - 2$	m	$\sqrt{3}$	appross.
1	$m^2 = 4$	$m^2 = 1$	2 e 1	$\frac{2}{1} = 2$ e $\frac{1}{1} = 1$	per eccesso e per difetto
2	$m^2 = 13$	$m^2 = 10$			
3	$m^2 = 28$	$m^2 = 25$	5	$\frac{5}{3}$	per difetto
4	$m^2 = 49$	$m^2 = 46$	7	$\frac{7}{4}$	per eccesso
5	$m^2 = 76$	$m^2 = 73$			
6	$m^2 = 109$	$m^2 = 106$			
7	$m^2 = 148$	$m^2 = 145$			
8	$m^2 = 193$	$m^2 = 190$			
9	$m^2 = 244$	$m^2 = 241$			
10	$m^2 = 301$	$m^2 = 298$			
11	$m^2 = 364$	$m^2 = 361$	19	$\frac{19}{11}$	per difetto
12	$m^2 = 433$	$m^2 = 430$			
13	$m^2 = 508$	$m^2 = 505$			
14	$m^2 = 589$	$m^2 = 586$			
15	$m^2 = 676$	$m^2 = 673$	26	$\frac{26}{15}$	per eccesso

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
m	2 e 1		5	7							19				26	...

n	1	4	15	...
m	2	7	26	...

n	1	3	11	...
m	1	5	19	...

Se indichiamo con N e M i valori da trovare e con n e m quelli conosciuti, allora

$$\begin{cases} N = 2n + m \\ M = 3n + 2m \end{cases}$$

n	1	4	15	56	209	780	...
m	2	7	26	97	362	1351	...

n	1	3	11	41	153	...
m	1	5	19	71	265	...

Archimede

Archimede nasce probabilmente nel 287 a.C.

studia matematica presso il Museo di Alessandria

muore nel 212 a.C., ucciso da un soldato romano

A noi sono pervenuti molti scritti di Archimede.

Differenze tra gli scritti di Archimede e gli *Elementi* di Euclide

Il *metodo di esaustione* è introdotto da Eudosso di Cnido, un grande matematico e astronomo, discepolo di Platone, vissuto prima di Euclide, probabilmente ad Atene, e attivo tra il 350-310 a.C.

A Eudosso si attribuisce la teoria delle proporzioni, che si trova nel V e nel X libro degli *Elementi*, e il metodo di esaustione, che noi è arrivato grazie agli scritti di Archimede (anche se alcuni riferimenti a questo metodo li troviamo anche negli *Elementi*).

La misura del cerchio

Nella prima proposizione viene presentato il metodo di esaustione

Nella terza proposizione il metodo di esaustione viene usato come strumento di calcolo per approssimare π

Nella seconda proposizione, usando un'approssimazione di π ottenuta nella proposizione precedente, si confrontano aree e si ottengono altri risultati

Prop. 1: Ogni cerchio è uguale a un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale a un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [uguale all'altro cateto]

Indichiamo con:

A_C l'area del cerchio

A_T l'area del triangolo rettangolo

r il raggio del cerchio

$c_1 = r$ un cateto del triangolo

$c_2 = 2\pi r$ un cateto del triangolo

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2 = A_C$$

Confrontiamo le due aree A_C e A_T :

$$A_C = A_T$$

$$A_C > A_T$$

$$A_C < A_T$$

Sia $A_C > A_T$

$$A = A_C - A_T$$

Inscriviamo nel cerchio un quadrato di area A_Q : $A_Q < A_C$

$$A_1 = A_C - A_Q$$

Confrontiamo A_1 con A :

1) $A_1 < A$

$$A_C - A_Q < A_C - A_T$$

$$A_Q > A_T$$

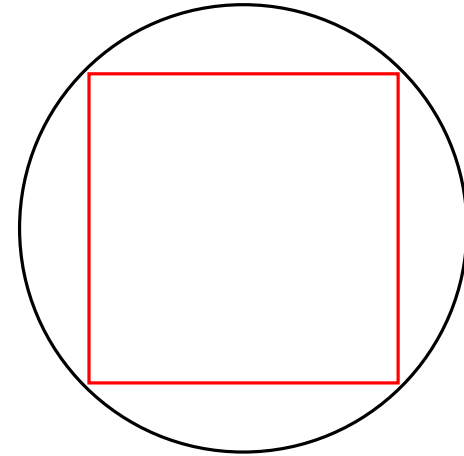
$$A_Q = \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perimetro}$$

$$\text{apotema} < r = c_1$$

$$\text{perimetro} < 2\pi r = c_2$$

$$A_Q = \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perimetro} < \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 = A_T$$

assurdo perché $A_Q > A_T$



2) $A_1 > A$

Inscriviamo nel cerchio un ottagono di area A_O : $A_O < A_C$

$$A_2 = A_C - A_O$$

Confrontiamo A_2 con A :

1) $A_2 < A$

$$A_C - A_O < A_C - A_T$$

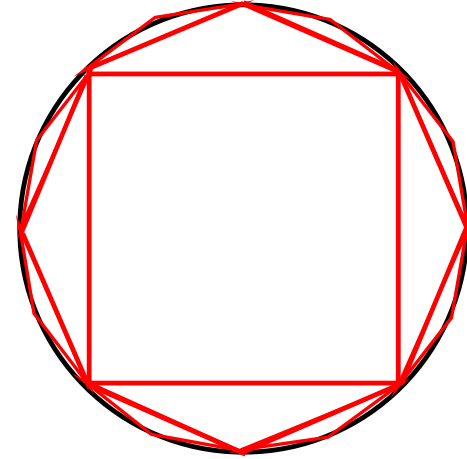
$$A_O > A_T$$

$$A_O = \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perimetro} < \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 = A_T$$

assurdo perché $A_O > A_T$

2) $A_2 > A$

Inscriviamo nel cerchio un poligono di 16 lati.



Dopo un numero finito di passi

si ottiene un poligono di n lati (con n pari e multiplo di 4) di area A_N , con $A_N < A_C$, tale che

$$A_k = A_C - A_N < A.$$

$$A_C - A_N < A_C - A_T$$

$$A_N > A_T$$

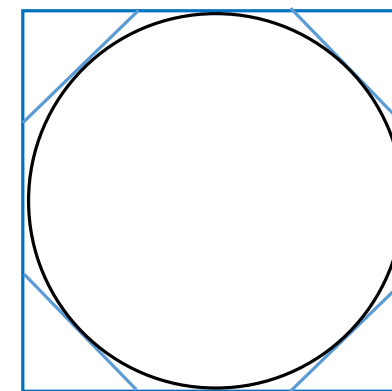
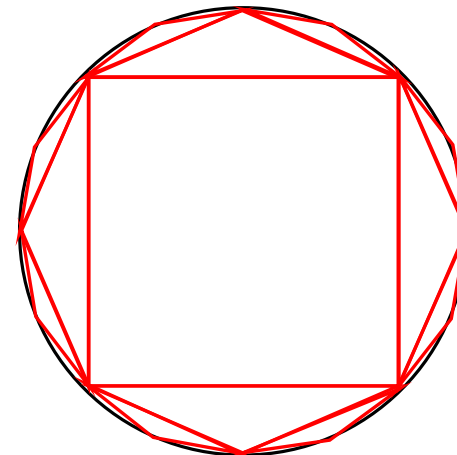
$$A_N = \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perimetro} < \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 = A_T$$

assurdo perché $A_N > A_T$

Dunque, non può essere $A_C > A_T$.

Analogamente si dimostra che non può essere $A_C < A_T$

Allora, deve essere $A_C = A_T$.



Prop. 3: La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera di meno di un settimo del diametro e di più di dieci settantunesimi

$$3 \cdot 2r + \frac{10}{71} \cdot 2r < 2\pi r < 3 \cdot 2r + \frac{1}{7} \cdot 2r$$

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Archimede parte dall'esagono regolare e si ferma al poligono regolare di 96 lati.

Nella dimostrazione si serve delle approssimazioni di $\sqrt{3}$.

$$\pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Consideriamo un cerchio di diametro AC e centro E , la retta CF tangente al cerchio in C ,
l'angolo $\widehat{CEF} = 30^\circ (= \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}R)$.

Nel triangolo rettangolo ECF si ha: $\frac{EF}{FC} = 2$

Calcoliamo $\frac{EC}{FC}$

Tracciamo EG bisettrice di \widehat{FEC} .

Calcoliamo $\frac{EC}{GC}$

Tracciamo EH bisettrice di \widehat{GEC} .

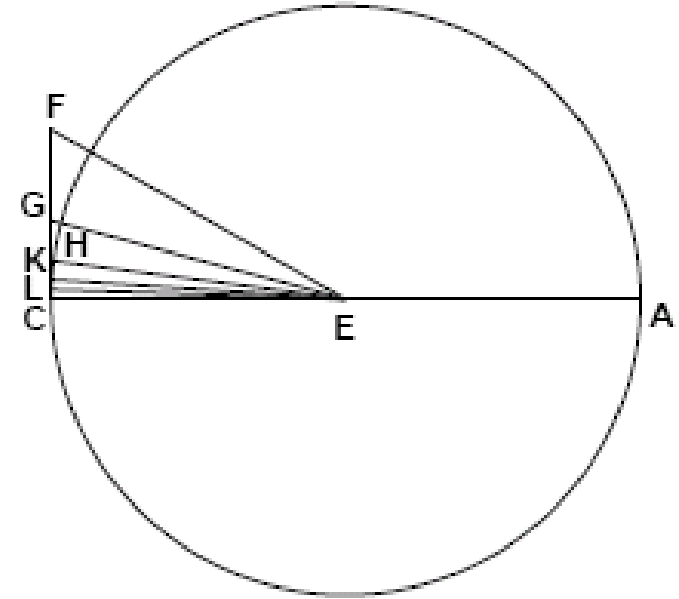
Calcoliamo $\frac{EC}{HC}$

Tracciamo EK bisettrice di \widehat{HEC} .

Calcoliamo $\frac{EC}{KC}$

Tracciamo EL bisettrice di \widehat{KEC} .

Calcoliamo $\frac{EC}{LC}$



$$\frac{2 \cdot EC}{2 \cdot LC} = \frac{d}{l} \quad \left(= \frac{\text{diametro del cerchio}}{\text{lato del poligono di 96 lati}} \right)$$

$$\frac{d}{l \cdot 96} = \frac{d}{p} \quad \left(= \frac{\text{diametro del cerchio}}{\text{perimetro del poligono di 96 lati}} \right)$$

$$\frac{p}{d} < 3 + \frac{1}{7} \Rightarrow \pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} < \frac{p}{d} < 3 + \frac{1}{7}$$

$$\pi > 3 + \frac{10}{71}$$

Consideriamo un cerchio di diametro AC e centro E e l'angolo $\widehat{BAC} = 30^\circ (= \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}R)$.

Nel triangolo rettangolo ABC si ha: $\frac{AC}{BC} = 2$.

Calcoliamo $\frac{AC}{FC}$

Tracciamo AG bisettrice di \widehat{BAC} .

Calcoliamo $\frac{AC}{GC}$

Tracciamo AH bisettrice di \widehat{GAC} .

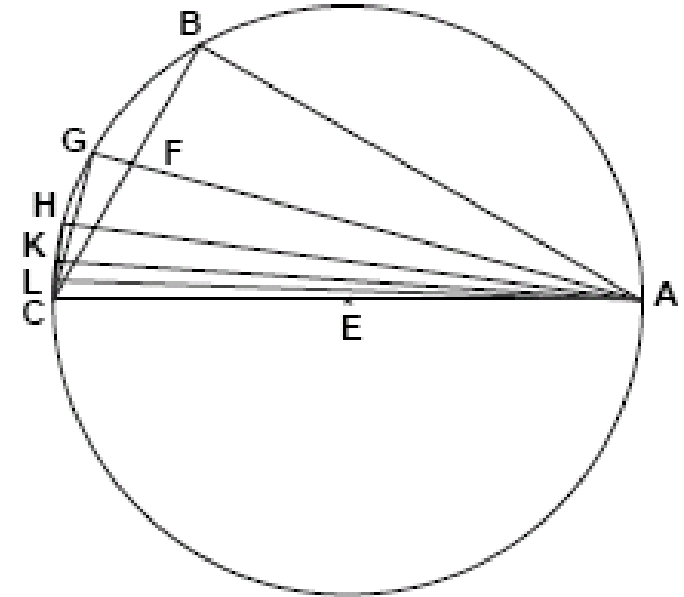
Calcoliamo $\frac{AC}{HC}$

Tracciamo AK bisettrice di \widehat{HAC} .

Calcoliamo $\frac{AC}{KC}$

Tracciamo AL bisettrice di \widehat{KAC} .

Calcoliamo $\frac{AC}{LC}$



$$\frac{AC}{LC} = \frac{d}{l} \left(= \frac{\text{diametro del cerchio}}{\text{lato del poligono di 96 lati}} \right)$$

$$\frac{d}{l \cdot 96} = \frac{d}{p} \left(= \frac{\text{diametro del cerchio}}{\text{perimetro del poligono di 96 lati}} \right)$$

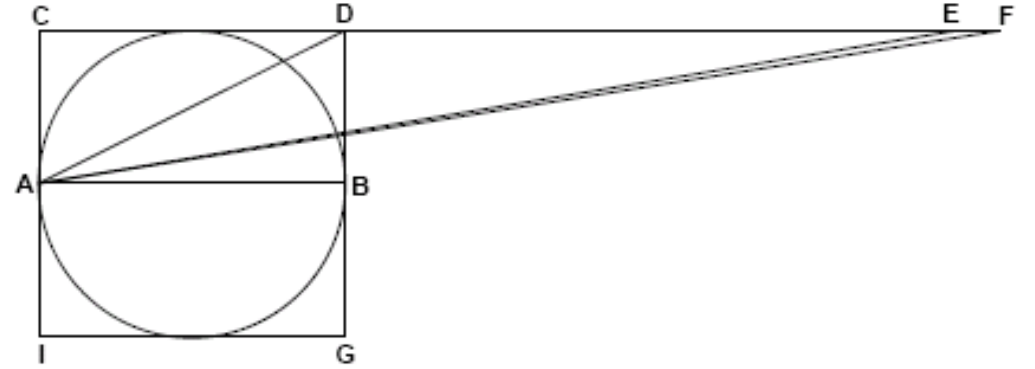
$$\frac{p}{d} > 3 + \frac{10}{71} \Rightarrow \pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} > \frac{p}{d} > 3 + \frac{10}{71}$$

Prop. 2: Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14

Consideriamo un cerchio di diametro AB
e il quadrato circoscritto a esso $CDGI$.

Prolunghiamo CD di un segmento $DE = 2CD$

e DE di un segmento $EF = \frac{1}{7}CD$



Congiungiamo D, E, F con A e calcoliamo le aree dei triangoli rettangoli ottenuti

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD$$

$$A_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot CE = \frac{1}{2} AC \cdot (CD + DE) = \frac{1}{2} AC \cdot (CD + 2CD) = \frac{1}{2} AC \cdot 3CD = \frac{3}{2} AC \cdot CD$$

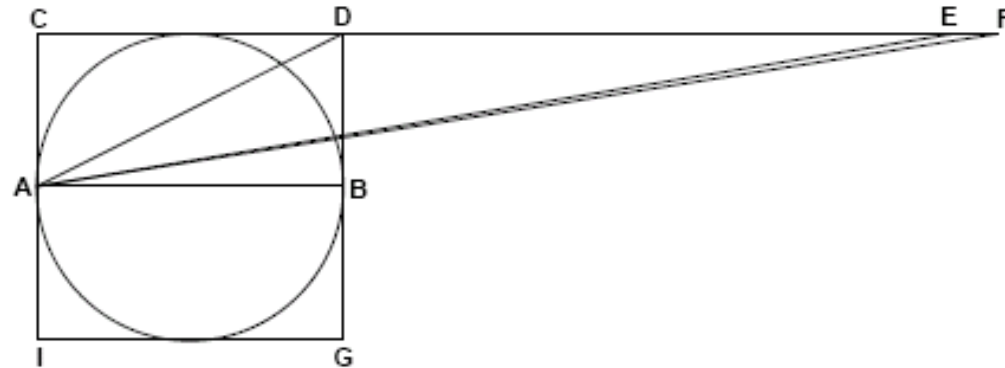
$$A_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF = \frac{1}{2} AC \cdot (CD + DE + EF) = \frac{1}{2} AC \cdot \left(CD + 2CD + \frac{1}{7} CD \right) = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{22}{7} CD = \frac{22}{14} AC \cdot CD = \frac{11}{7} AC \cdot CD$$

Calcoliamo i seguenti rapporti di aree:

$$\frac{A_{ACE}}{A_{ACD}} = \frac{\frac{3}{2} AC \cdot CD}{\frac{1}{2} AC \cdot CD} = 3 = \frac{21}{7}$$

$$\frac{A_{ACD}}{A_{AEF}} = \frac{A_{ACD}}{A_{ACF} - A_{ACE}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CD}{\frac{11}{7} AC \cdot CD - \frac{3}{2} AC \cdot CD} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CD}{\frac{1}{14} AC \cdot CD} = 7$$

$$\frac{A_{ACF}}{A_{ACD}} = \frac{\frac{11}{7} AC \cdot CD}{\frac{1}{2} AC \cdot CD} = \frac{22}{7}$$



$$AB^2 = CD^2 = 4A_{ACD}$$

A_{ACF} è uguale all'area del cerchio di diametro AB , infatti: $A_{ACF} = \frac{11}{7} AC \cdot CD$

Poiché $AC = r$, $CD = 2r$, abbiamo $A_{ACF} = \frac{11}{7} r \cdot 2r = \frac{22}{7} r^2$

Poiché, per la prop.3, π può essere approssimato da $\frac{22}{7}$ si ha: $A_{ACF} = r^2 \pi = \text{area del cerchio}$

$$\text{Allora, } \frac{A_{\text{cerchio}}}{AB^2} = \frac{A_{ACF}}{4 \cdot A_{ACD}} = \frac{\frac{11}{7} \cdot AC \cdot CD}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD} = \frac{11}{14}$$

Apollonio

Apollonio vive dopo Archimede e prima del grande astronomo Ipparco.

Studi più recenti fanno risalire la sua morte al 170 a. C.

Elementi conici

in 8 libri

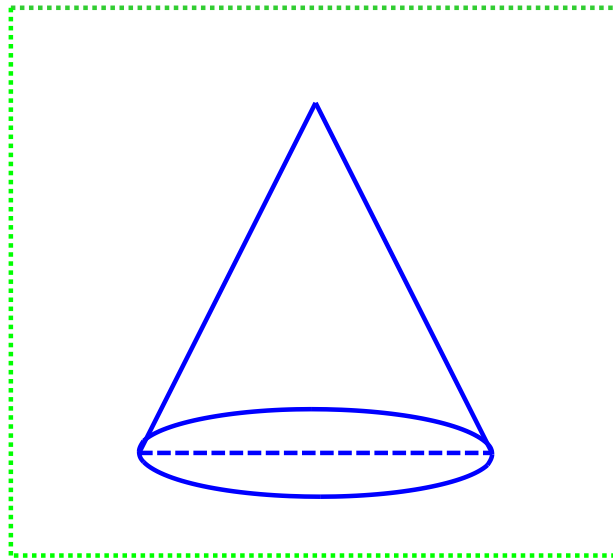
La presentazione delle coniche di Apollonio è la più completa dell'antichità.

Il cono secondo Euclide e Archimede

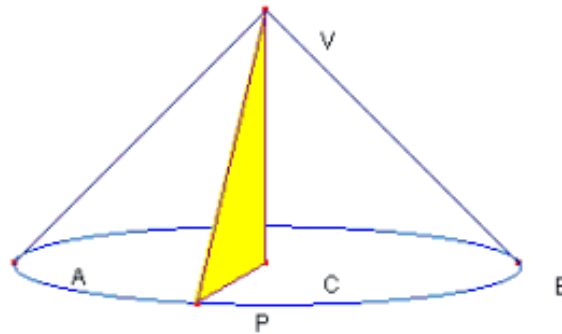
Il cono è un solido di rotazione ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto.

E' una figura limitata in senso euclideo.

Se si interseca il cono con un piano passante per il vertice e perpendicolare alla base si ottiene un triangolo.

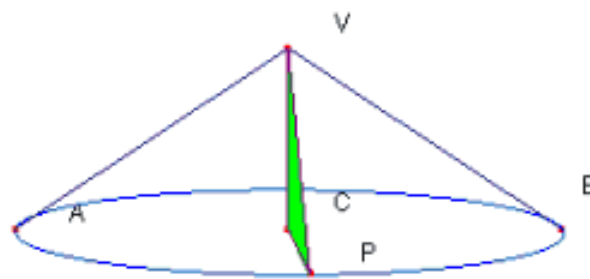


Se l'angolo al vertice del cono è retto, si ha il **cono rettangolo**, su cui si costruisce la sezione chiamata “**parabola**”.



(il triangolo rettangolo è isoscele)

Se l'angolo al vertice del cono è ottuso, si ha il **cono ottusangolo**, su cui si costruisce la sezione chiamata “**ellisse**”.



(la rotazione avviene attorno al cateto minore)

Si intersechi il cono con un altro piano, diverso dal precedente e perpendicolare alla base.

Se il cono è rettangolo, si ottiene una sezione che successivamente sarà chiamata **parabola**.

Se il cono è acutangolo, si ottiene una sezione che successivamente sarà chiamata **iperbole**.

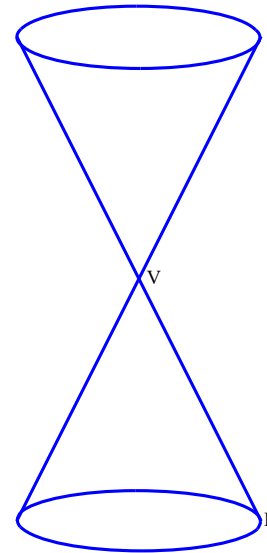
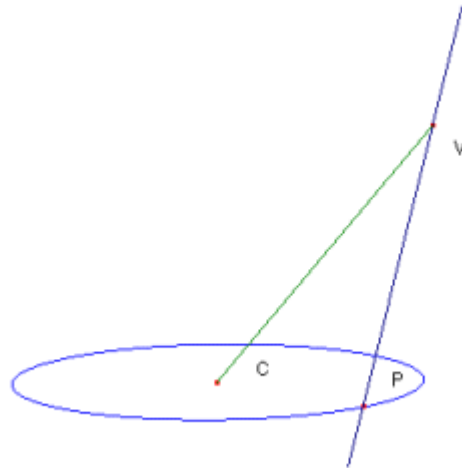
Se il cono è ottusangolo, si ottiene una sezione che successivamente sarà chiamata **ellisse**.

Il cono secondo Apollonio

Si consideri una circonferenza e un punto V fuori di essa.

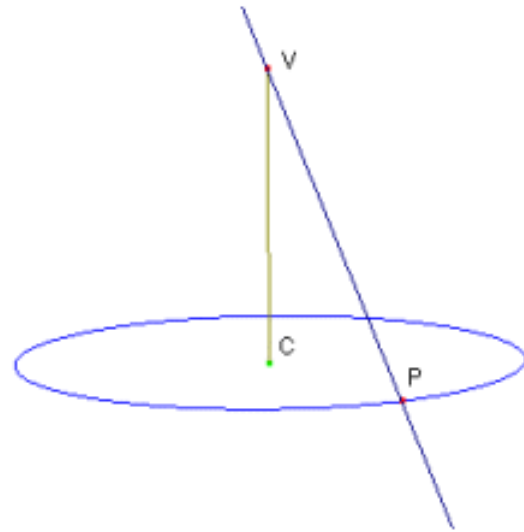
Si tracci la retta VP passante per il punto V e per un qualsiasi punto P della circonferenza.

Tenendo fisso il punto V e facendo ruotare la retta infinita in modo che tocchi successivamente tutti i punti della circonferenza, si ottiene un cono a due falde.

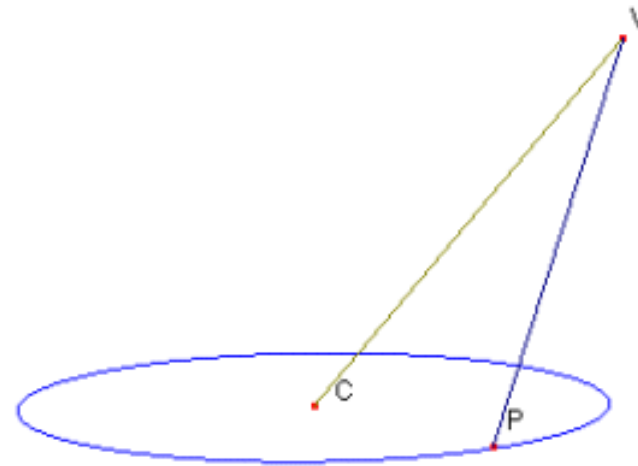


In base alla posizione del punto V rispetto alla circonferenza, si possono costruire solo due tipi di cono:

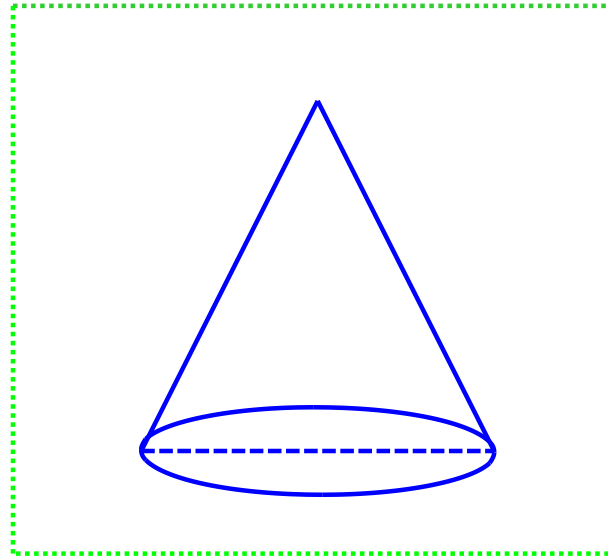
cono retto



cono scaleno

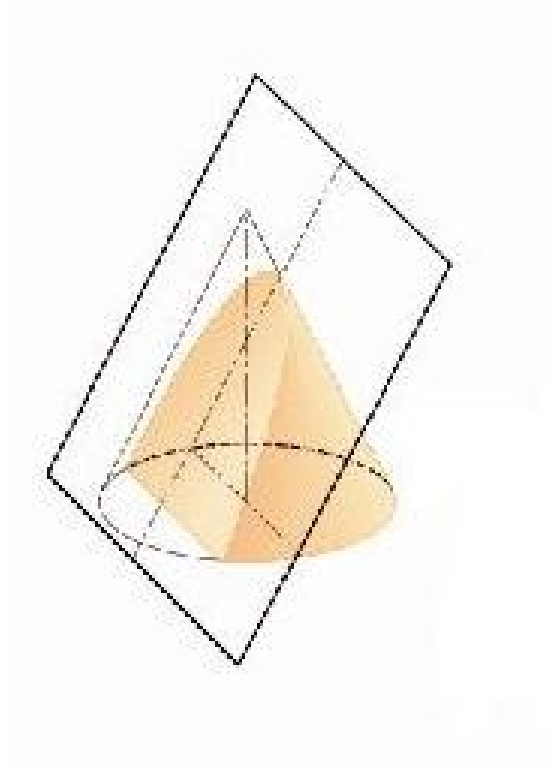


Si intersechi il cono con un piano passante per il vertice e perpendicolare alla base, ottenendo come sezione un triangolo.

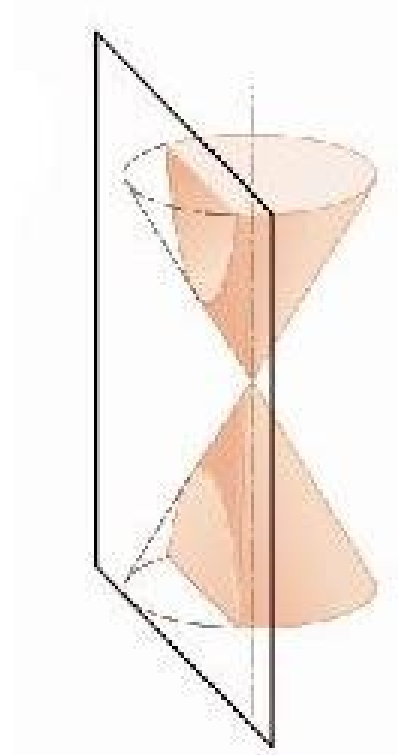


Si intersechi il cono con un altro piano perpendicolare alla base, ottenendo una seconda sezione.

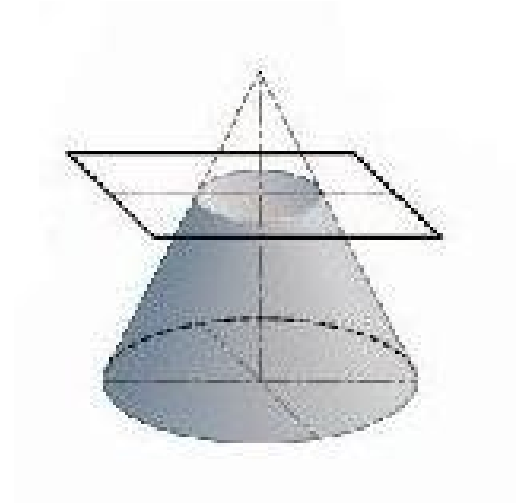
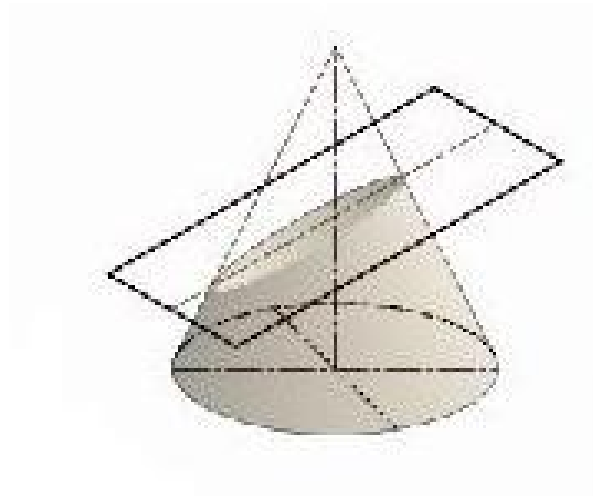
Se quest'ultimo piano è parallelo ad un lato del triangolo, allora la sezione ottenuta è una parabola.



Se il prolungamento dell'asse o diametro della sezione interseca il prolungamento di un lato del triangolo, allora la sezione ottenuta è una iperbole



Se il prolungamento dell'asse o diametro della sezione interseca il prolungamento della base del triangolo, allora la sezione ottenuta è una ellisse.



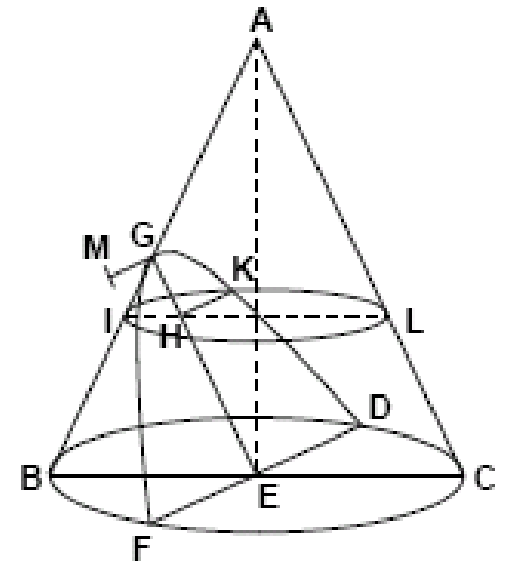
Prop. I,11:

Se il cono ABC è tagliato da un piano passante per l'asse, ottenendo il triangolo ABC , e se è poi tagliato con un secondo piano che interseca la base del cono lungo una linea perpendicolare FED alla base del triangolo ABC ; se, inoltre, il diametro GHE della sezione è parallelo a uno dei lati del triangolo ABC , allora il quadrato di ogni segmento, tracciato dalla sezione FGD al suo diametro, è equivalente al rettangolo delimitato dal segmento, compreso fra il vertice G della sezione e il punto H in cui il primo segmento interseca il diametro della sezione stessa, e da un "certo" segmento, il cui rapporto al segmento situato fra l'angolo del cono e il vertice della sezione è lo stesso di quello del quadrato della base del triangolo ABC al rettangolo delimitato dagli altri due lati del triangolo. Chiamiamo tale sezione *parabola*.

Siano $FED \perp BC$ e $GHE \parallel AC$.

Allora $HK^2 = GH \cdot GM$ dove GM è un "certo" segmento tale che

$$GM : AG = BC^2 : (AB \cdot AC)$$



Il discorso sulle coniche definite come luogo di punti del piano comincia con i matematici arabi e viene sviluppato a partire dal 1600.

Uno dei primi tentativi di passaggio dalle coniche viste come sezioni di un cono alle coniche come curve piane è stato fatto da C. Mydorge, molto conosciuto nel mondo culturale della prima metà del XVII sec.

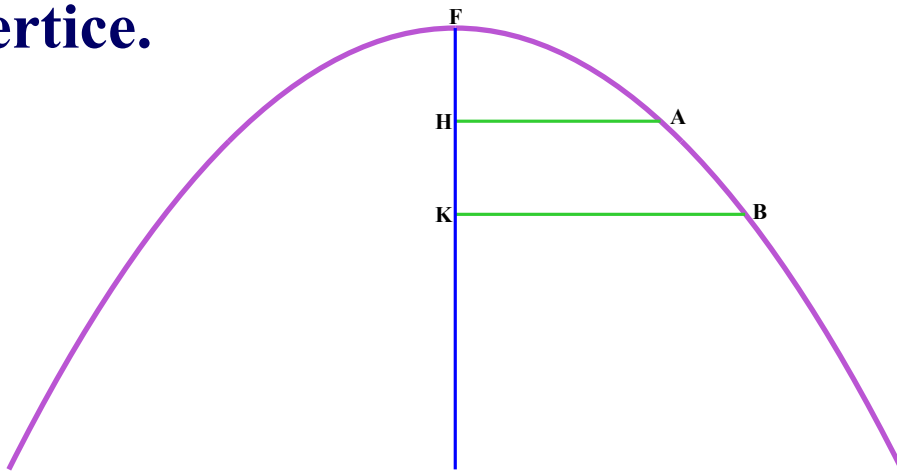
(dal trattato sulle coniche di Claude Mydorge, 1639)

Nozioni preliminari

Parabola

Proposizione I,7:

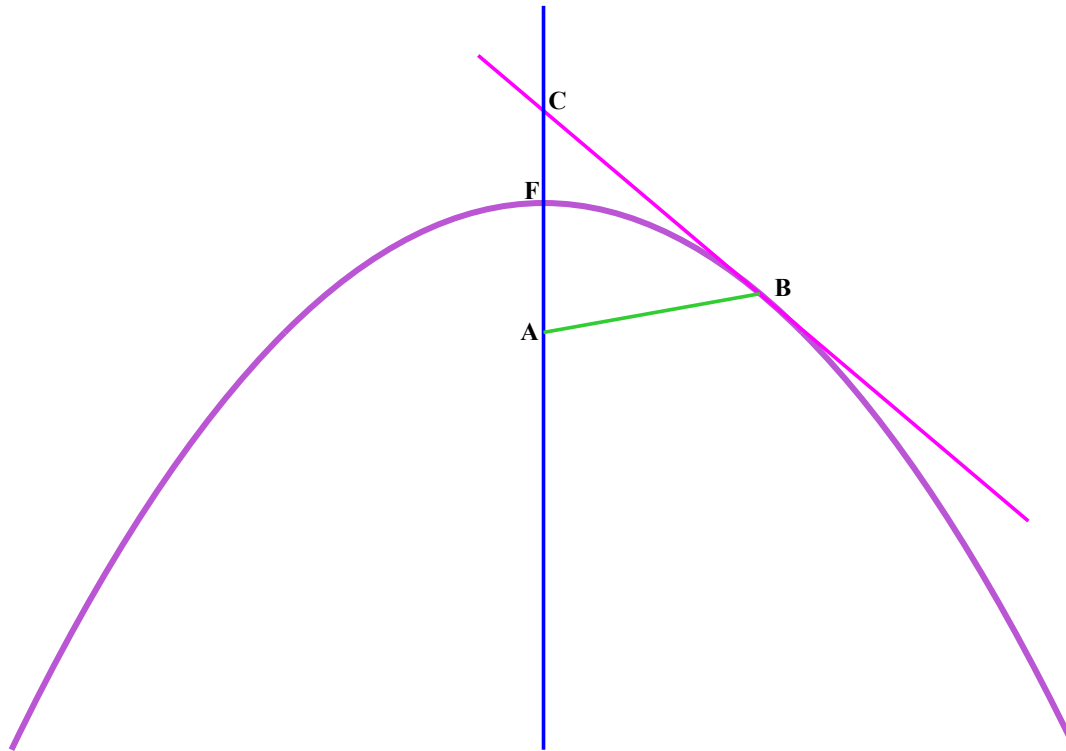
In ogni parabola, se da due punti della sezione si tracciano due ordinate, i loro quadrati sono in un rapporto uguale a quello dei rispettivi segmenti che staccano sull'asse a cominciare dal vertice.



$$(AH^2: BK^2 = FH: FK)$$

Proposizione I,47:

Se la retta tangente alla parabola in un punto interseca il prolungamento dell'asse, la distanza di questo punto dal fuoco è uguale alla distanza del fuoco dal punto di intersezione.

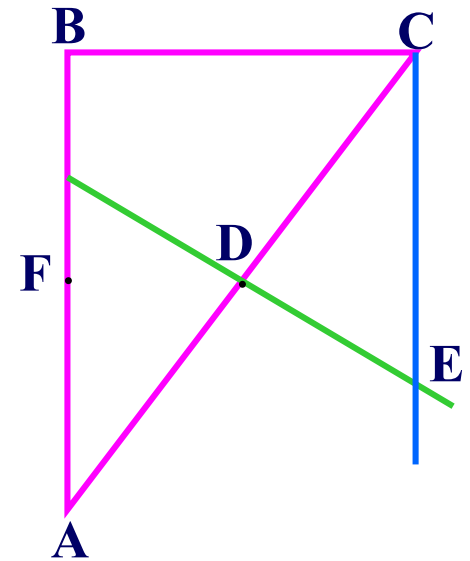
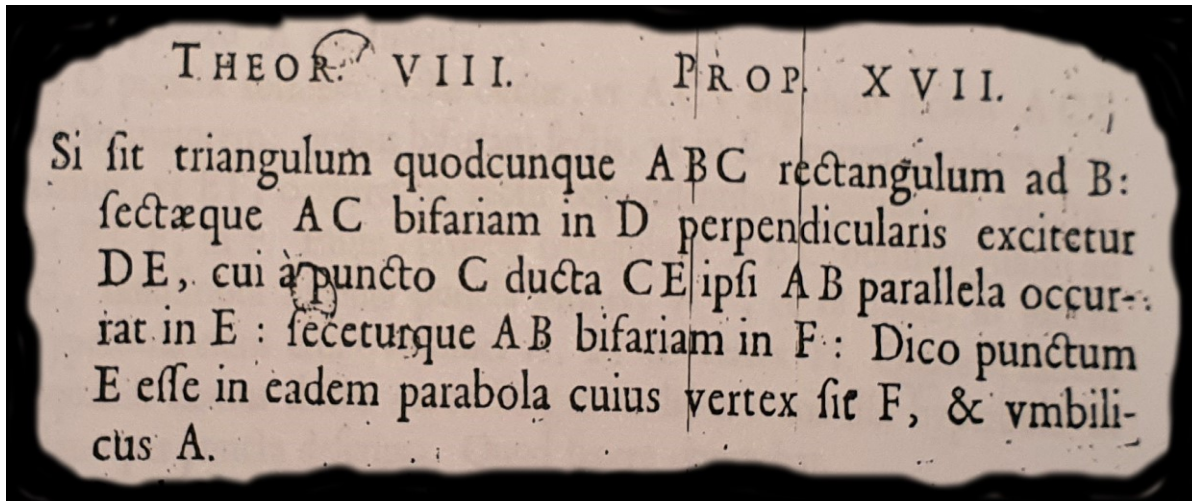


$$(BA=AC)$$

Proposizioni preliminari alla costruzione

Proposizione II,1:

Sia dato un qualunque triangolo ABC , rettangolo in B ; si divida AC in due parti uguali nel punto D e si costruisca DE perpendicolare ad AC ; da C si conduca CE parallela ad AB , che interseca DE nel punto E . Si divida AB in parti uguali nel punto F . Allora E si trova su una parabola di vertice F e fuoco A .



$$\widehat{ABC} = 90^\circ \quad AD = DC \quad DE \perp AC \quad CE \parallel AB \quad AF = FB$$

Sia G il punto di intersezione di DE con AB .

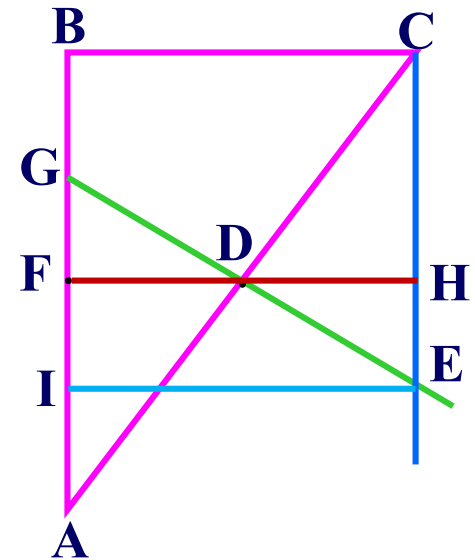
Si tracci FH parallela a BC .

I triangoli FDA e HDC sono congruenti,
quindi $FD = DH$.

I triangoli FGD e HDE sono congruenti,
quindi $HE = FG$.

Si tracci EI parallela a BC .

Allora: $HE = IF = FG$.



Nel triangolo ADG, rettangolo in D, si ha:

$$\mathbf{FD^2 = AF \cdot FG}$$

$$\mathbf{FD^2 = AF \cdot IF}$$

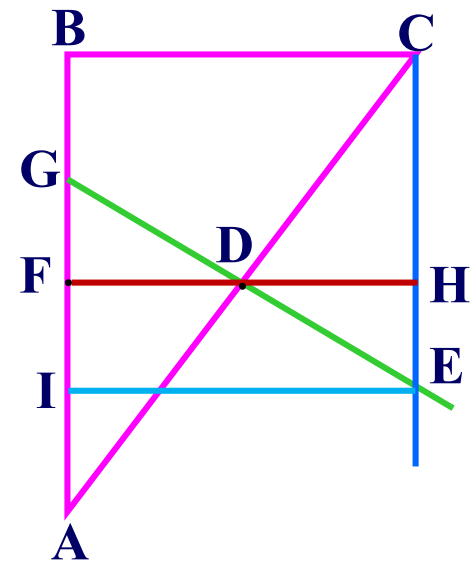
$$\mathbf{4 \cdot FD^2 = 4 \cdot AF \cdot IF}$$

$$\mathbf{(2FD)^2 = IF \cdot 4AF}$$

Essendo $2FD = FH = EI$, si ottiene:

$$\mathbf{EI^2 = IF \cdot 4AF}$$

Dunque il punto E si trova sulla parabola di vertice F e fuoco A.



PARABOLA

**Dati per posizione il fuoco ed il vertice di una parabola,
descrivere nello stesso piano la parabola per punti**

Siano A il fuoco e F il vertice di una parabola.

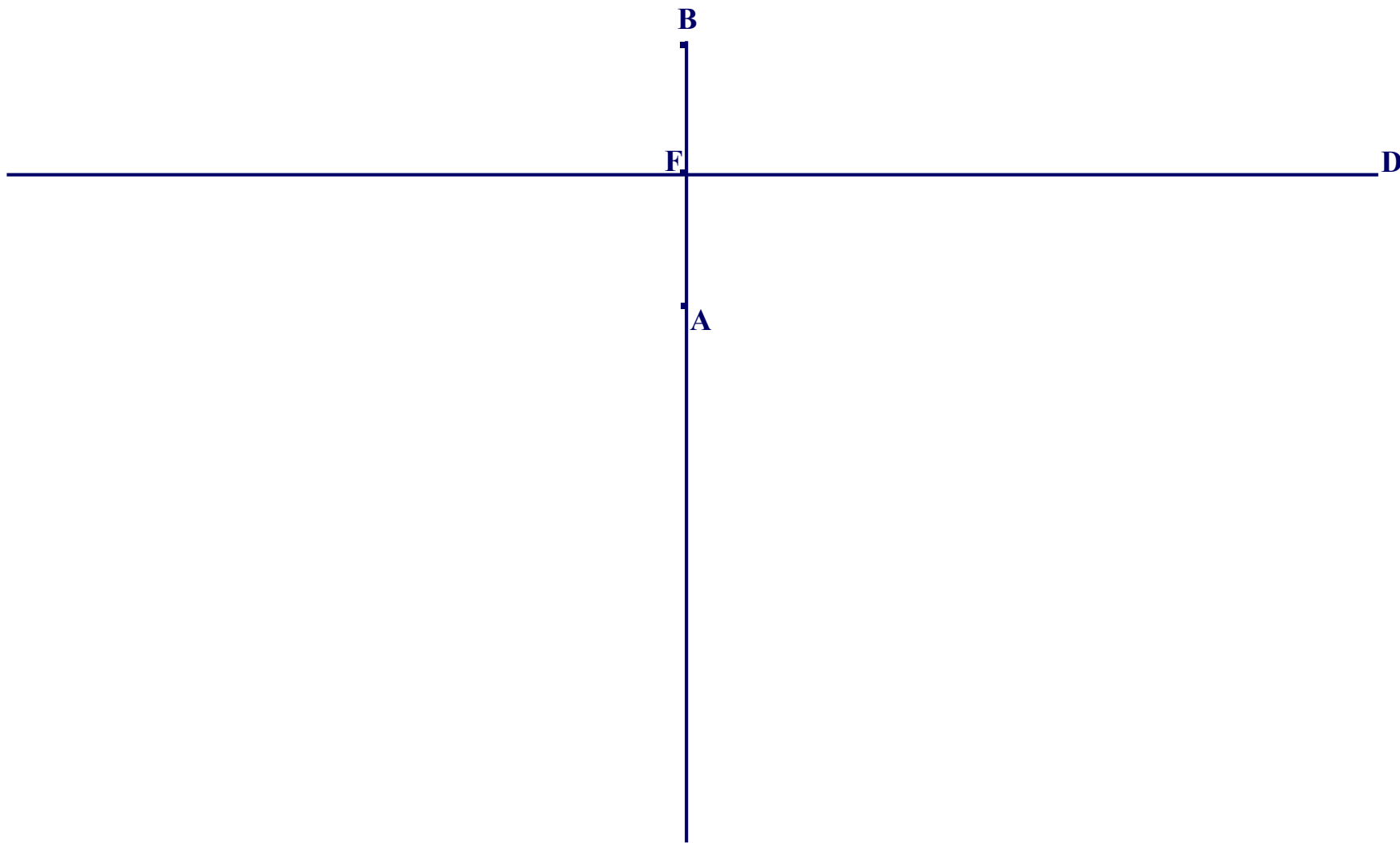
F

A

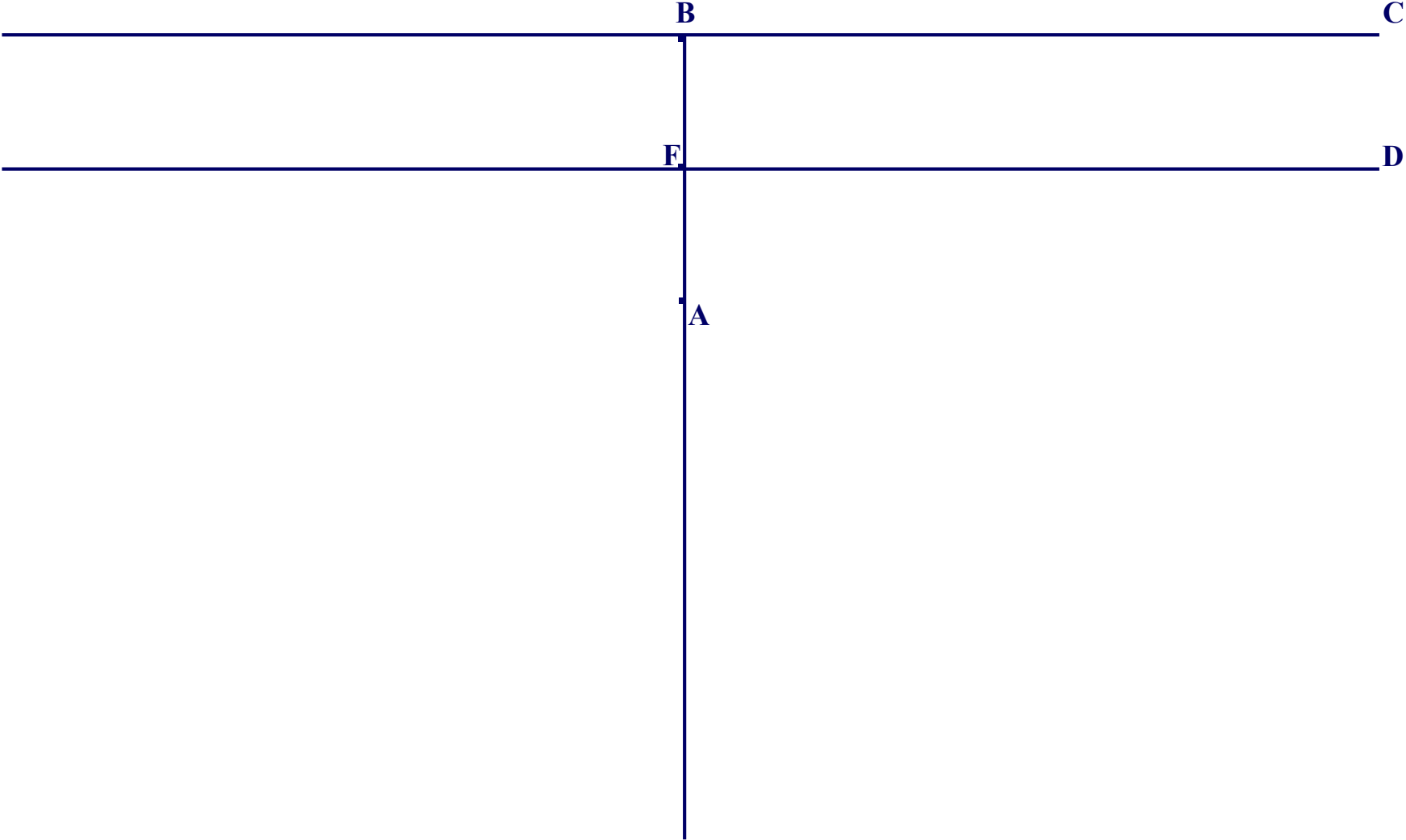
Si tracci AF e la si prolunghi fino al punto B in modo tale che sia $AF=FB$.



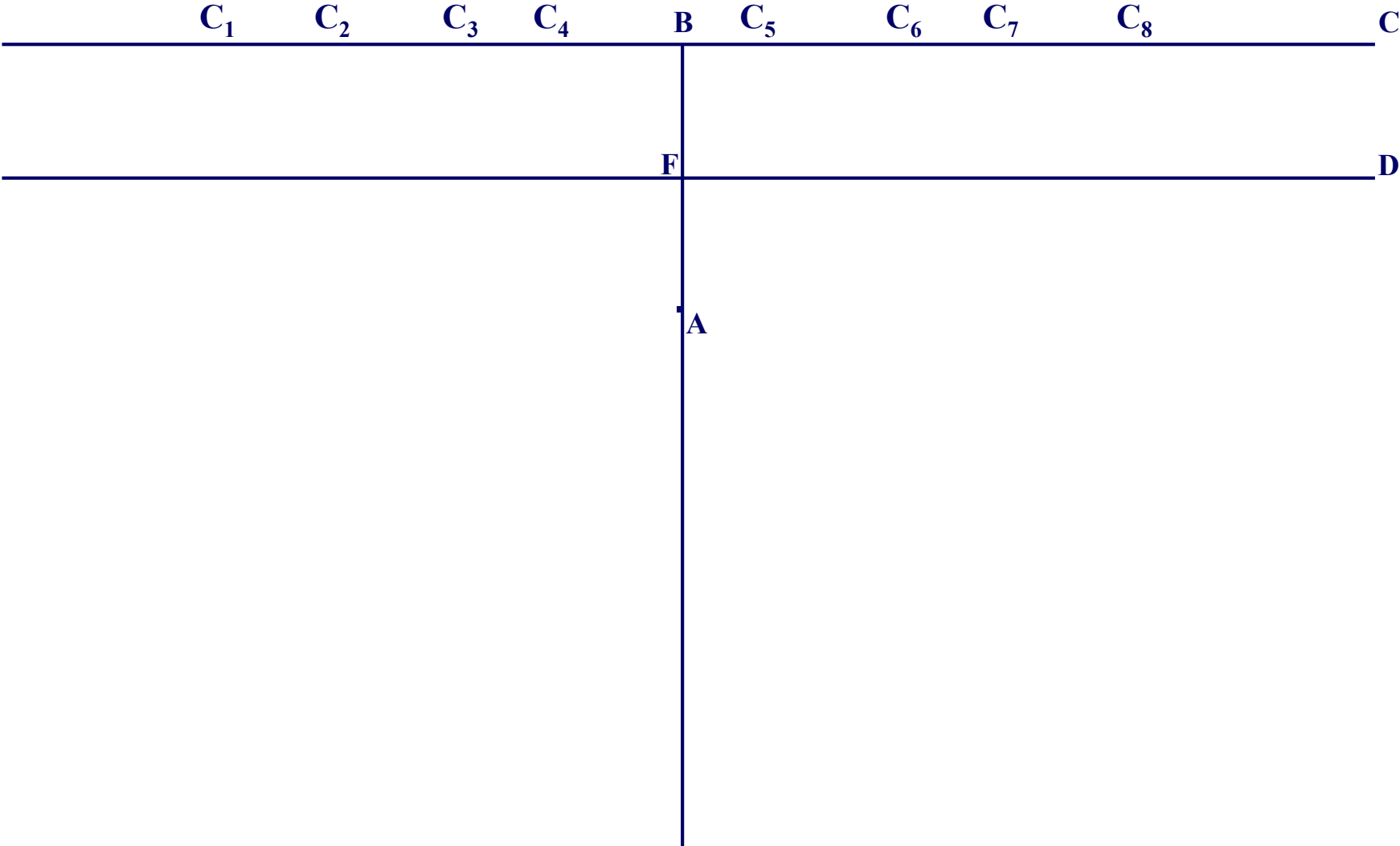
Dal punto F si tracci FD perpendicolare ad AB e la si prolunghi quanto si vuole.



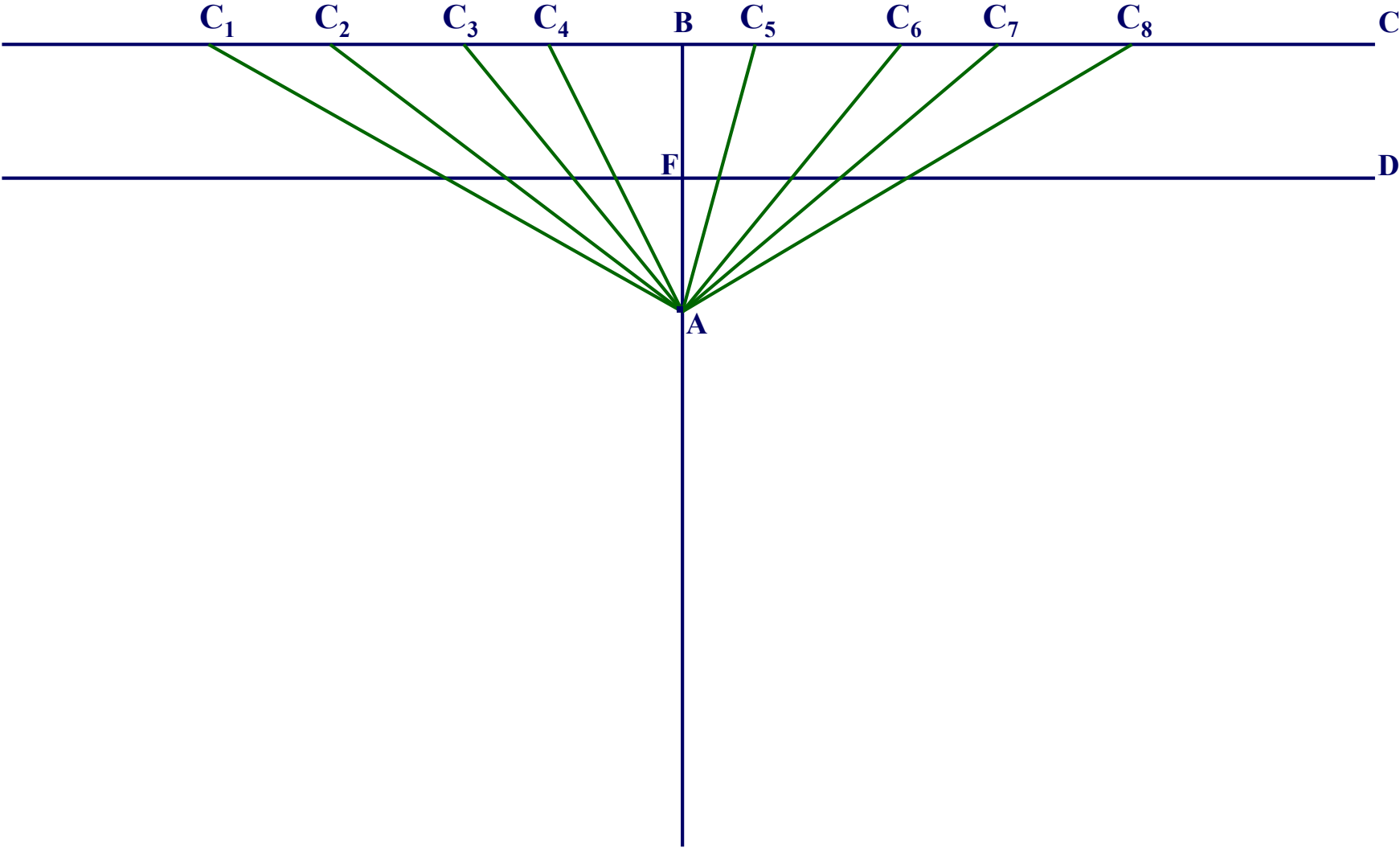
Dal punto B si tracci BC perpendicolare ad AB e la si prolunghi quanto si vuole.



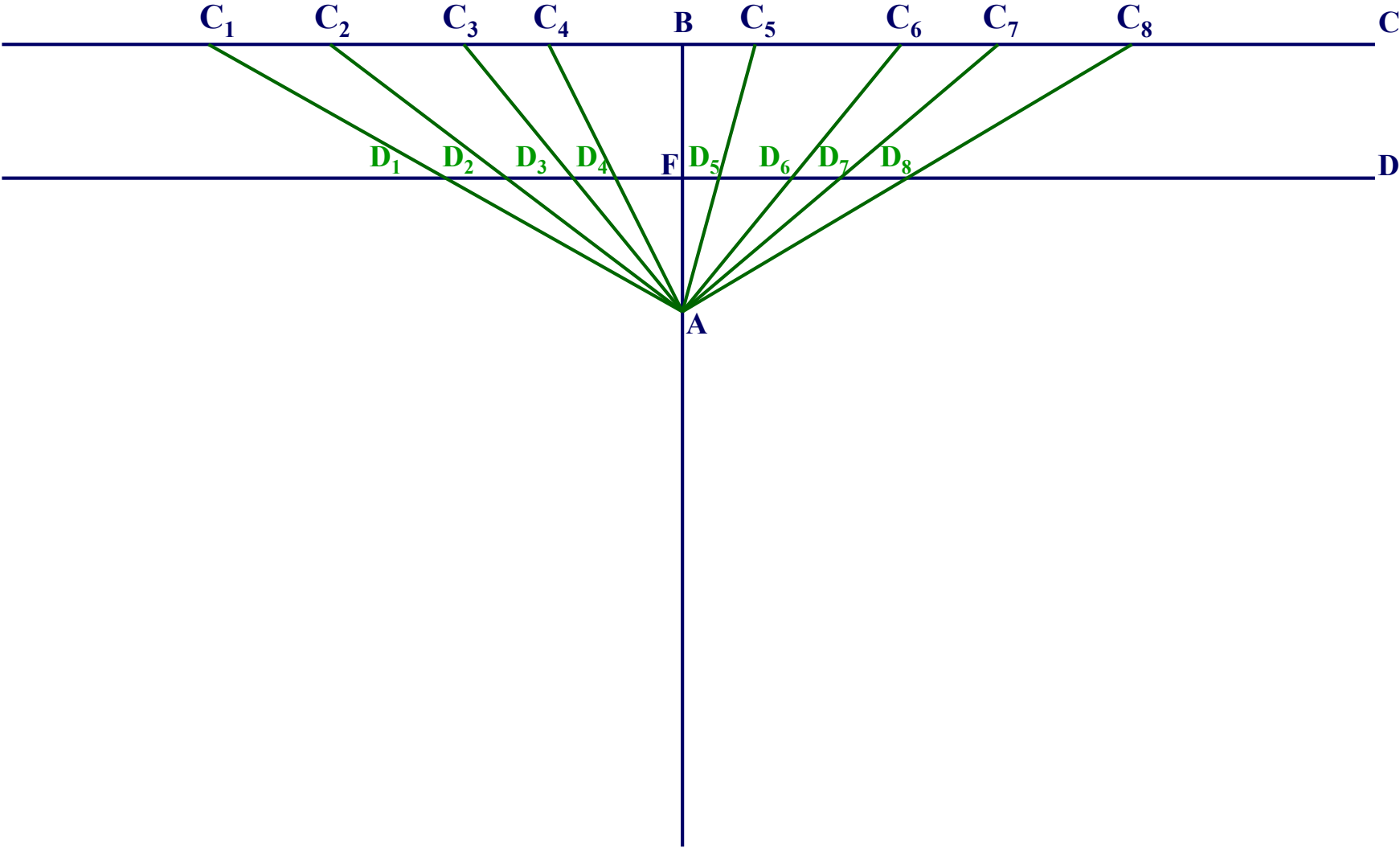
Si scelgano su BC quanti punti si vogliono C_i .



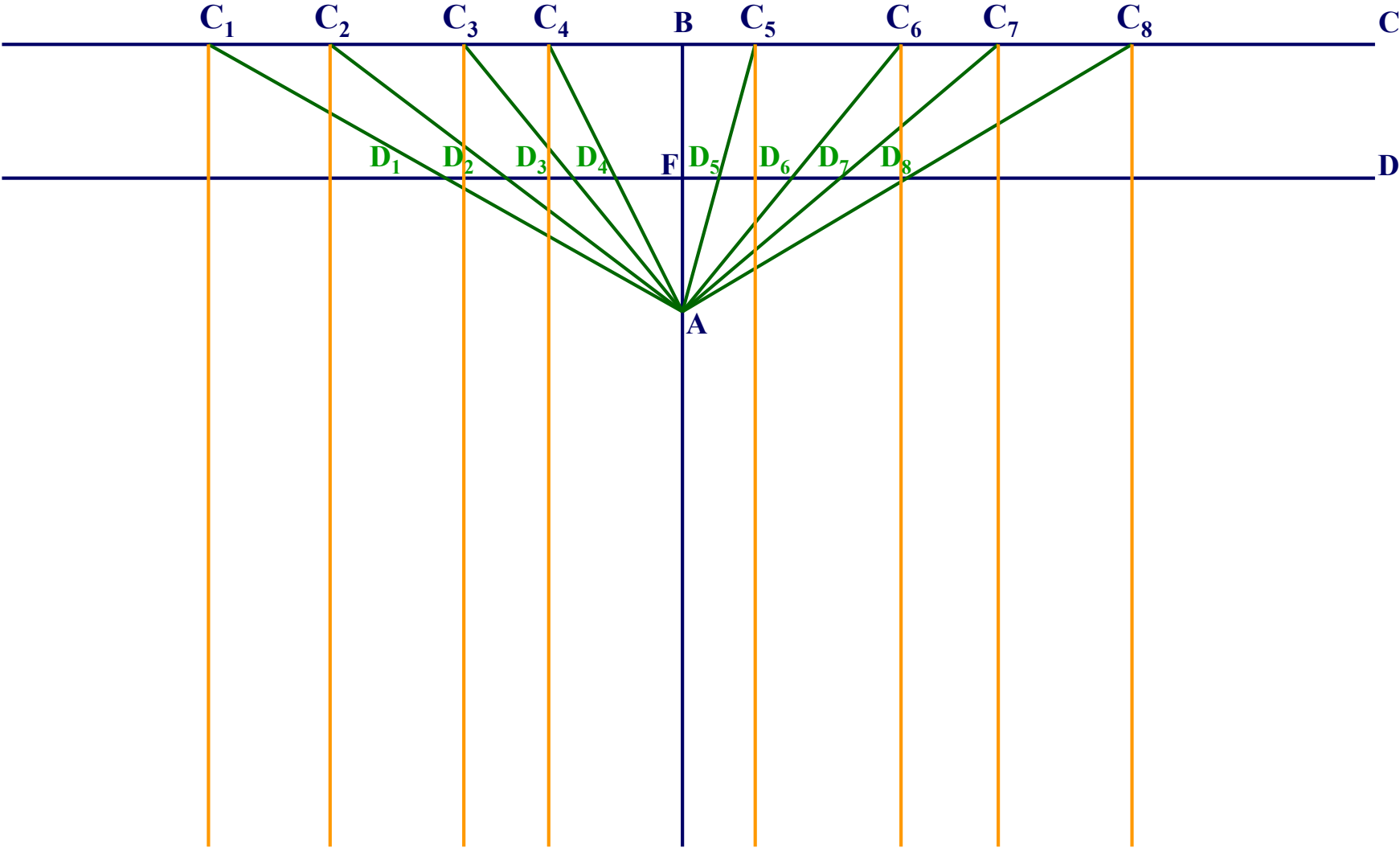
Si unisca ogni C_i con A.



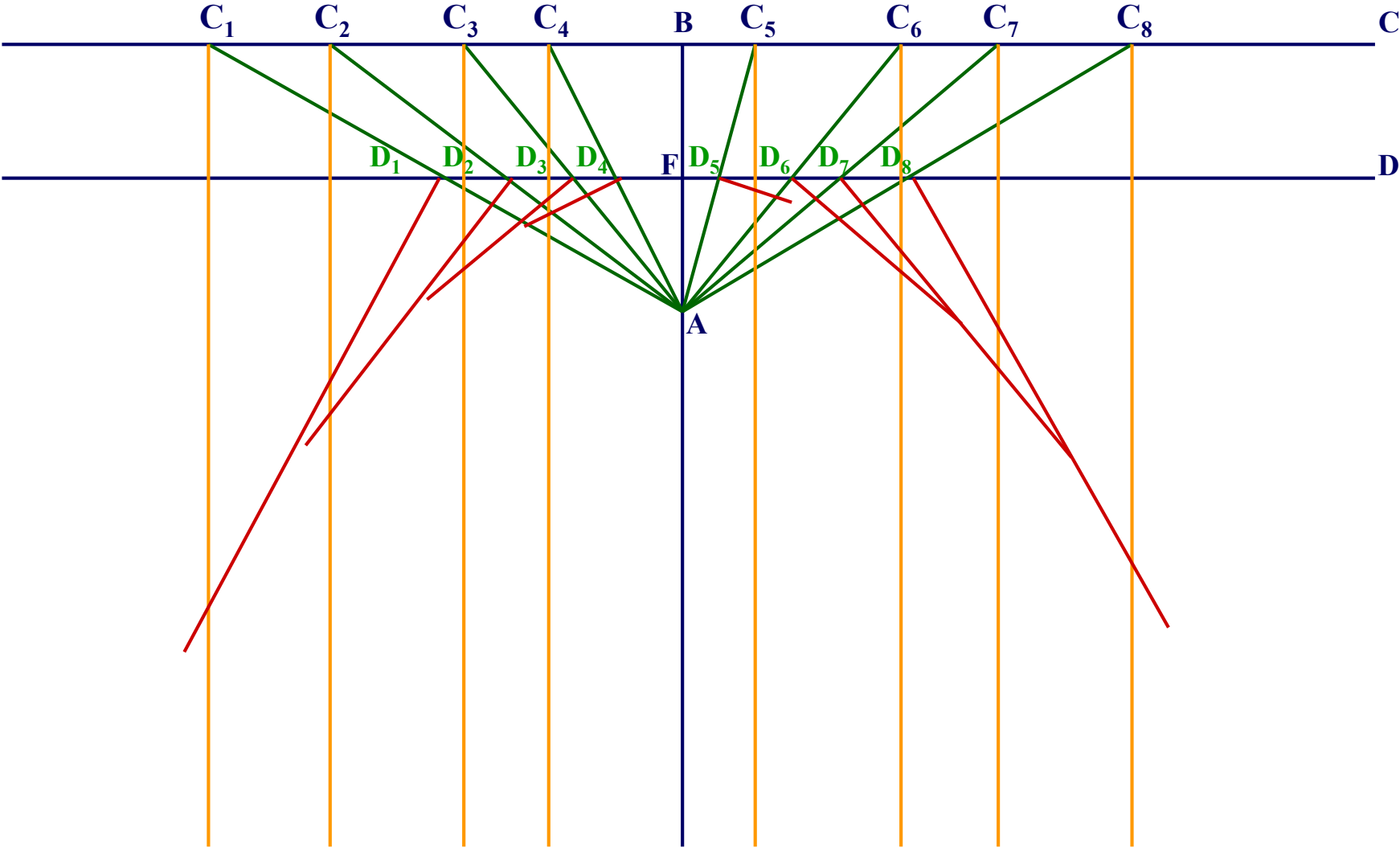
Ogni retta AC_i interseca FD in D_i .



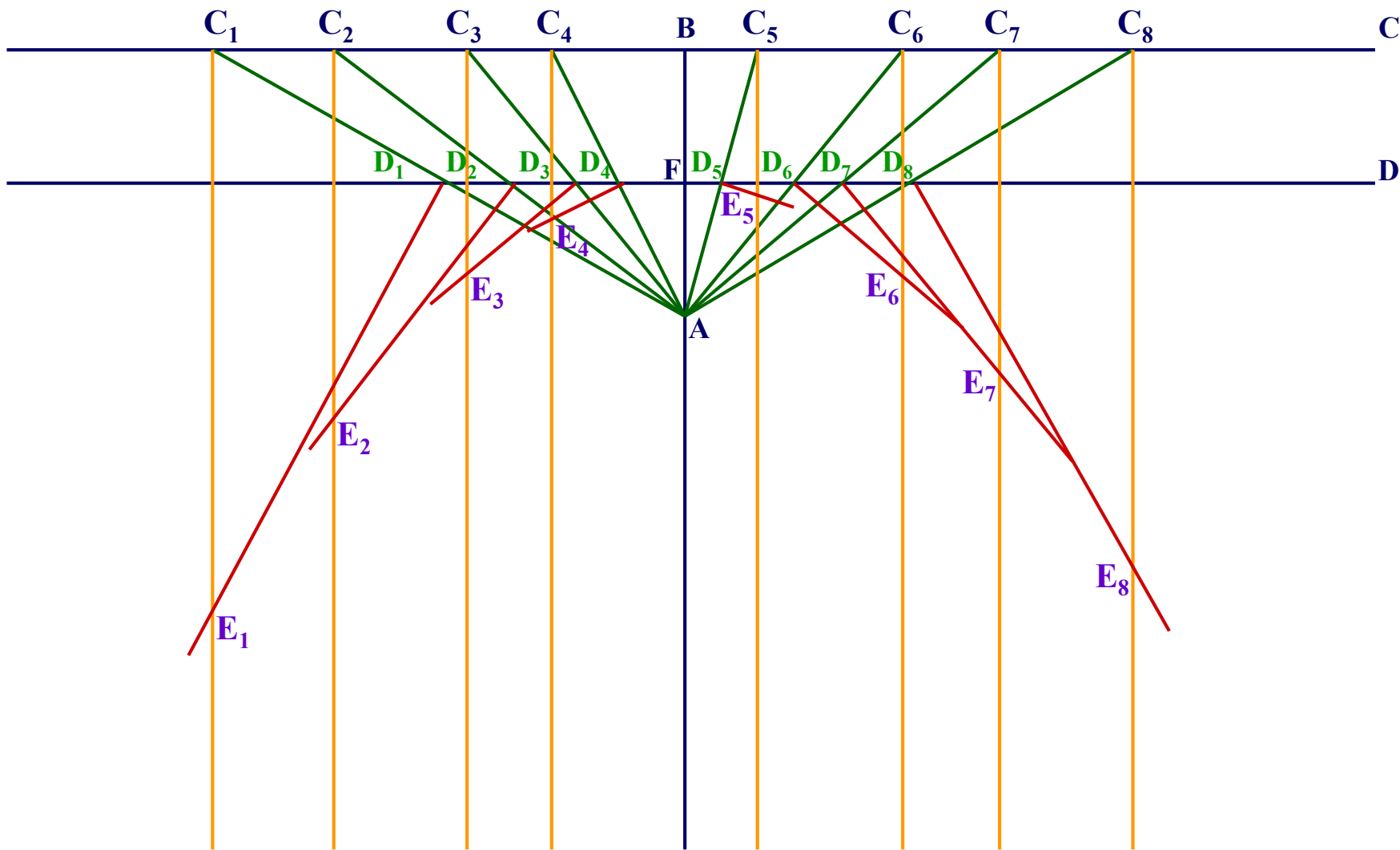
Dai punti C_i si traccino le parallele ad AB.



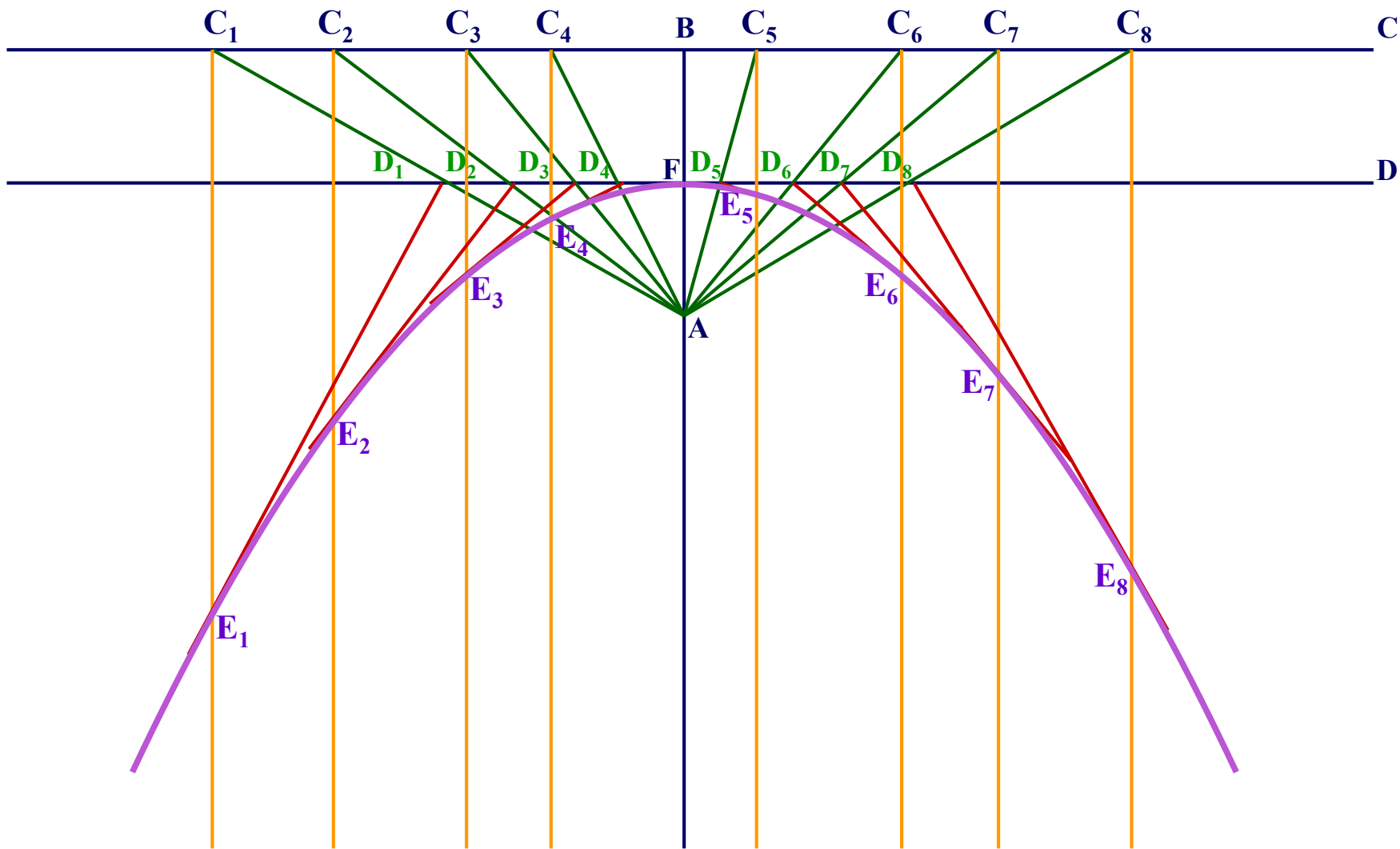
Dai punti D_i si traccino le perpendicolari alle rette AC_i .



Tali perpendicolari intersecano le parallele ad AB, condotte dai punti C_i , nei punti E_i .



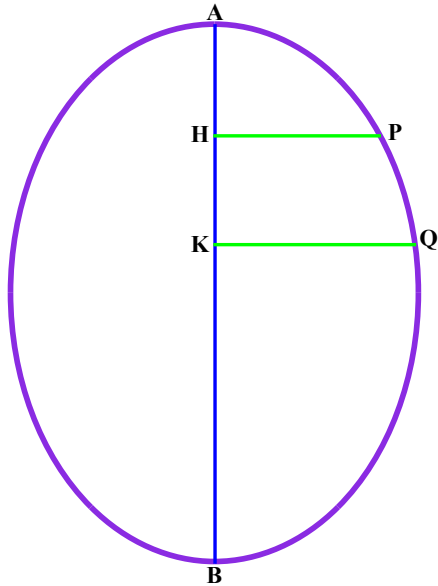
Per la prima proposizione preliminare i punti E_i si trovano su una stessa parabola di vertice F e fuoco A .



Ellisse ed iperbole

Proposizione I,8:

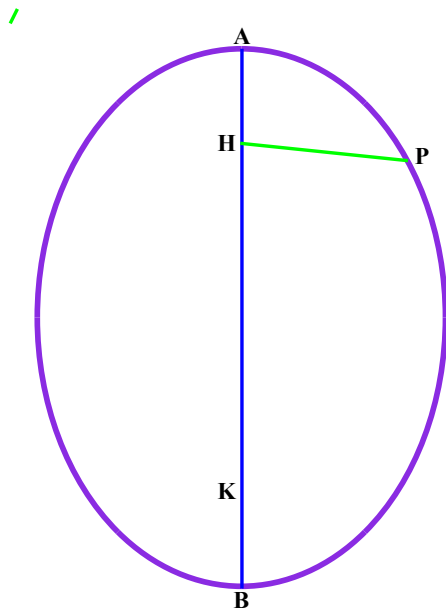
In ogni ellisse o iperbole o circonferenza, se da due punti della sezione si tracciano due ordinate all'asse, i loro quadrati sono in un rapporto uguale a quello dei prodotti dei segmenti che le ordinate staccano sull'asse trasverso.



$$(PH^2:QK^2=AH*HB:AK*KB)$$

Proposizione I,51:

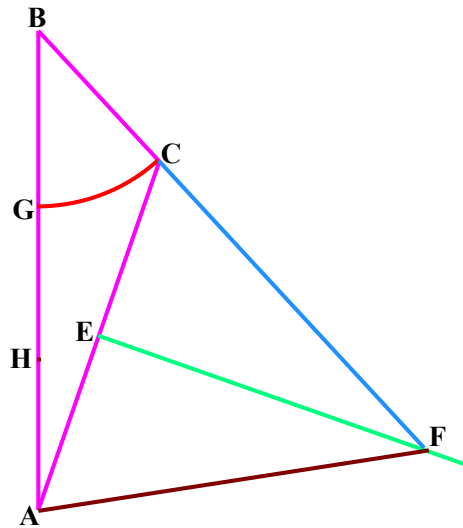
Se in un'iperbole o in un'ellisse da ambedue i fuochi si tracciano due rette ad uno stesso punto, nell'iperbole la maggiore supererà la minore di una quantità uguale all'asse trasverso, mentre nell'ellisse la loro somma sarà uguale all'asse trasverso.



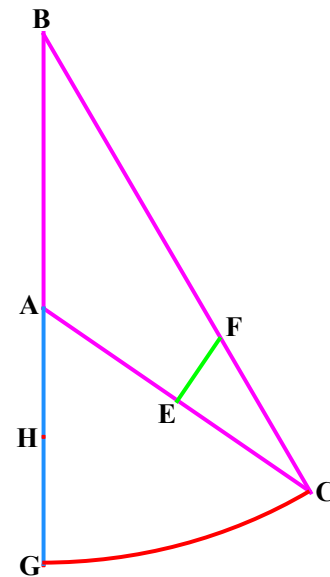
$$(HP+PK=AB)$$

Proposizione II,2:

Sia dato un triangolo ABC non rettangolo in C . Costruita $BG=BC$, AG si divida in due parti uguali in H ; si divida anche AC in due parti uguali in E ; da E si tracci la perpendicolare EF ad AC , che interseca BC in F . Allora F si trova sull'iperbole o sull'ellisse, di fuochi A, B e di vertice H .



(l'angolo BCA è ottuso)



(l'angolo BCA è acuto)

IPERBOLE

Dati per posizione i fuochi ed uno dei vertici di una iperbole, costruire nello stesso piano l'iperbole per punti

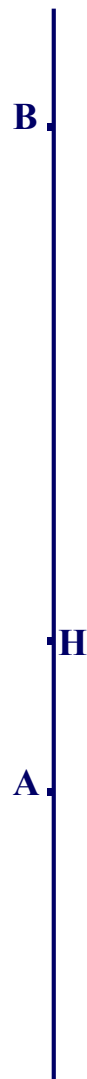
Siano A e B i fuochi e H uno dei vertici di una iperbole.

B.

•H

A.

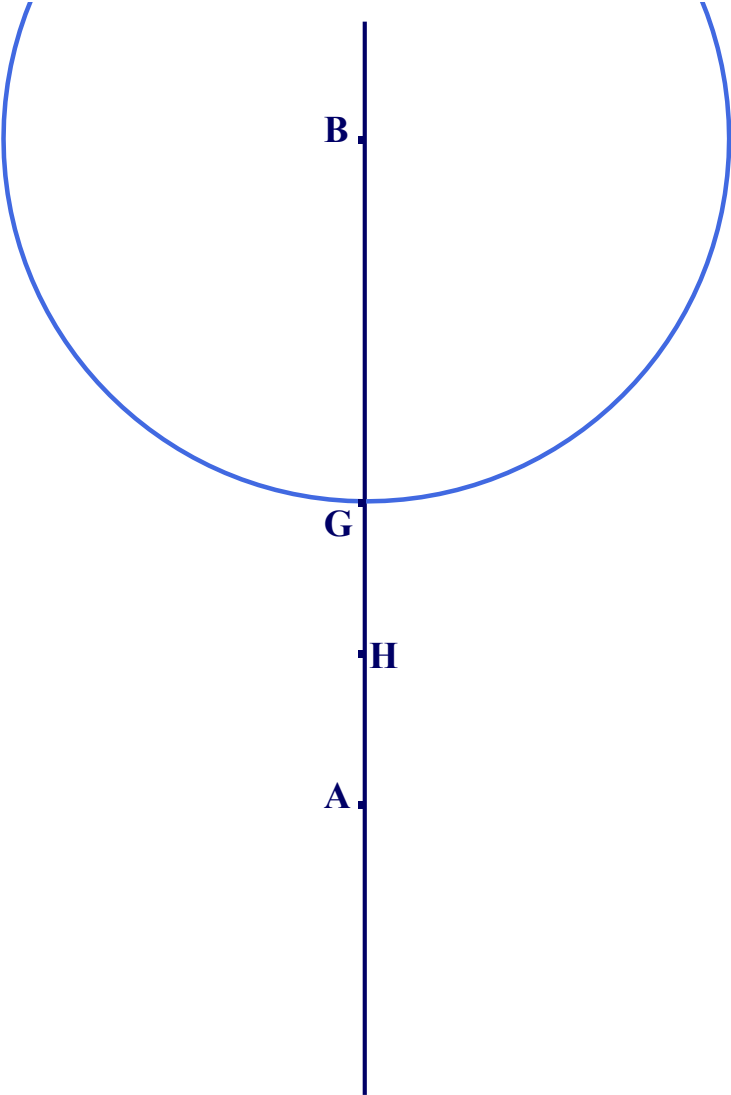
AB passa per H.



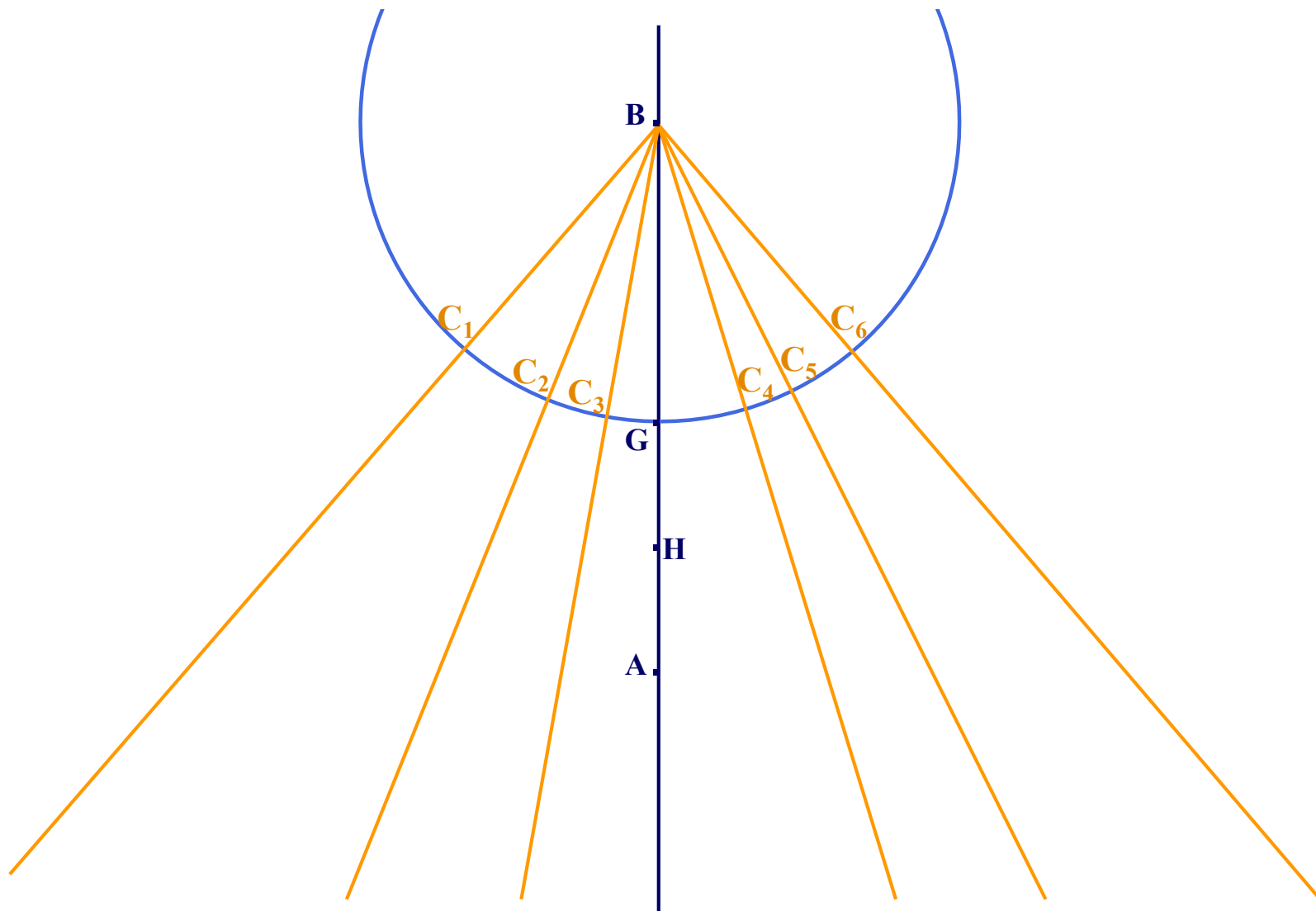
Si prenda $HG=AH$.



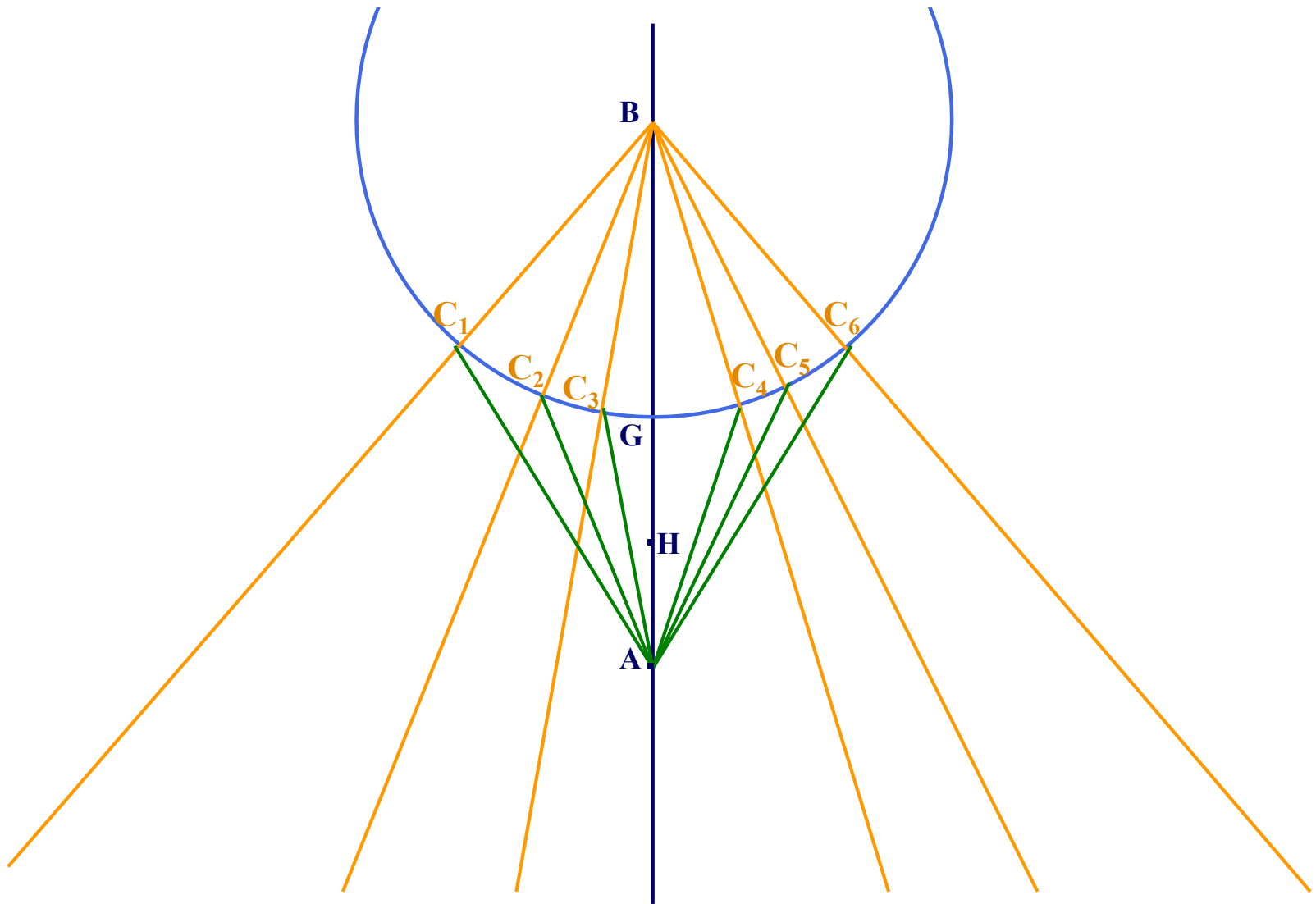
Si tracci un arco di circonferenza di centro B e raggio BG.



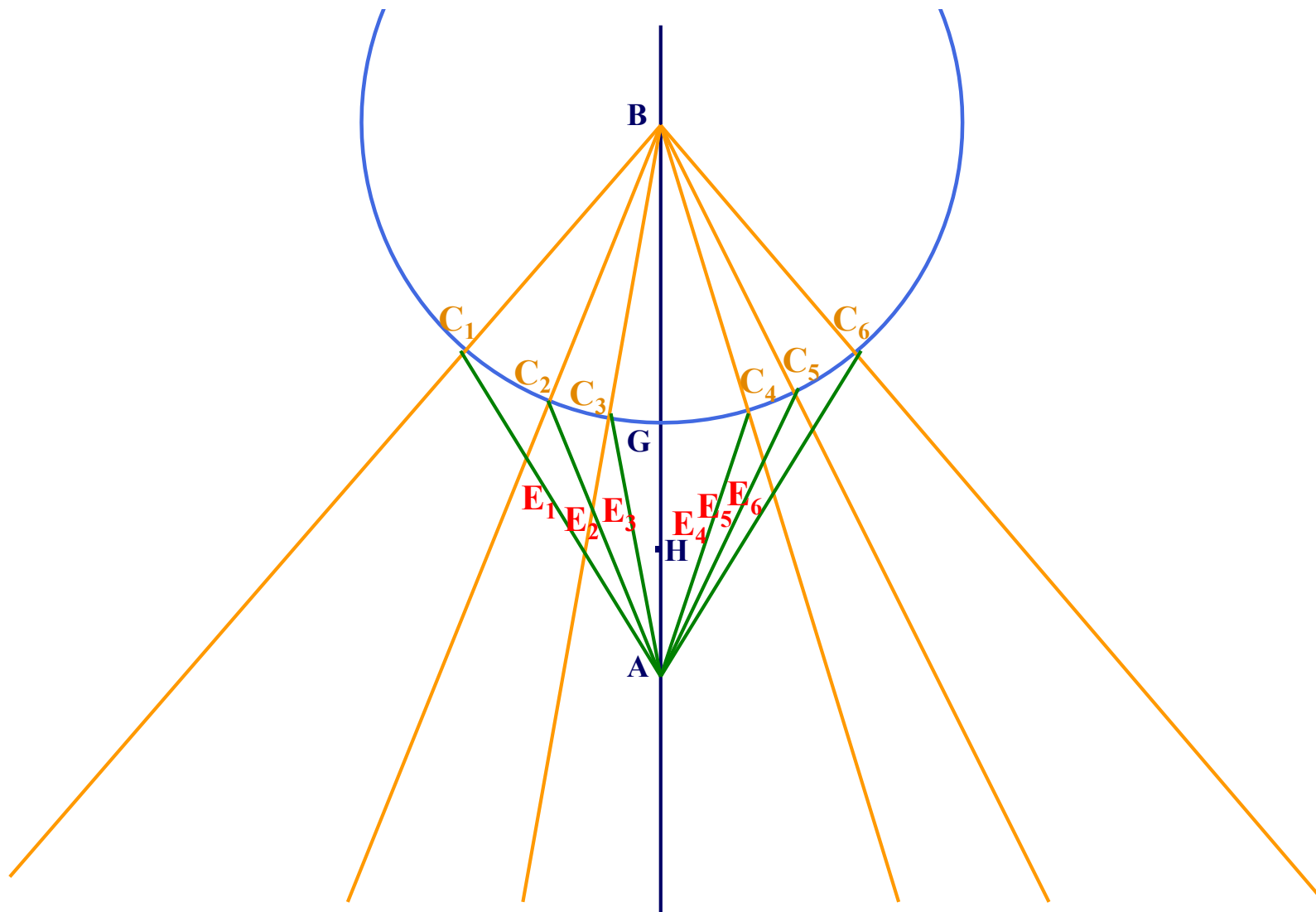
Dal punto B si traccino un certo numero di rette che intersechino l'arco di circonferenza nei punti C_i .



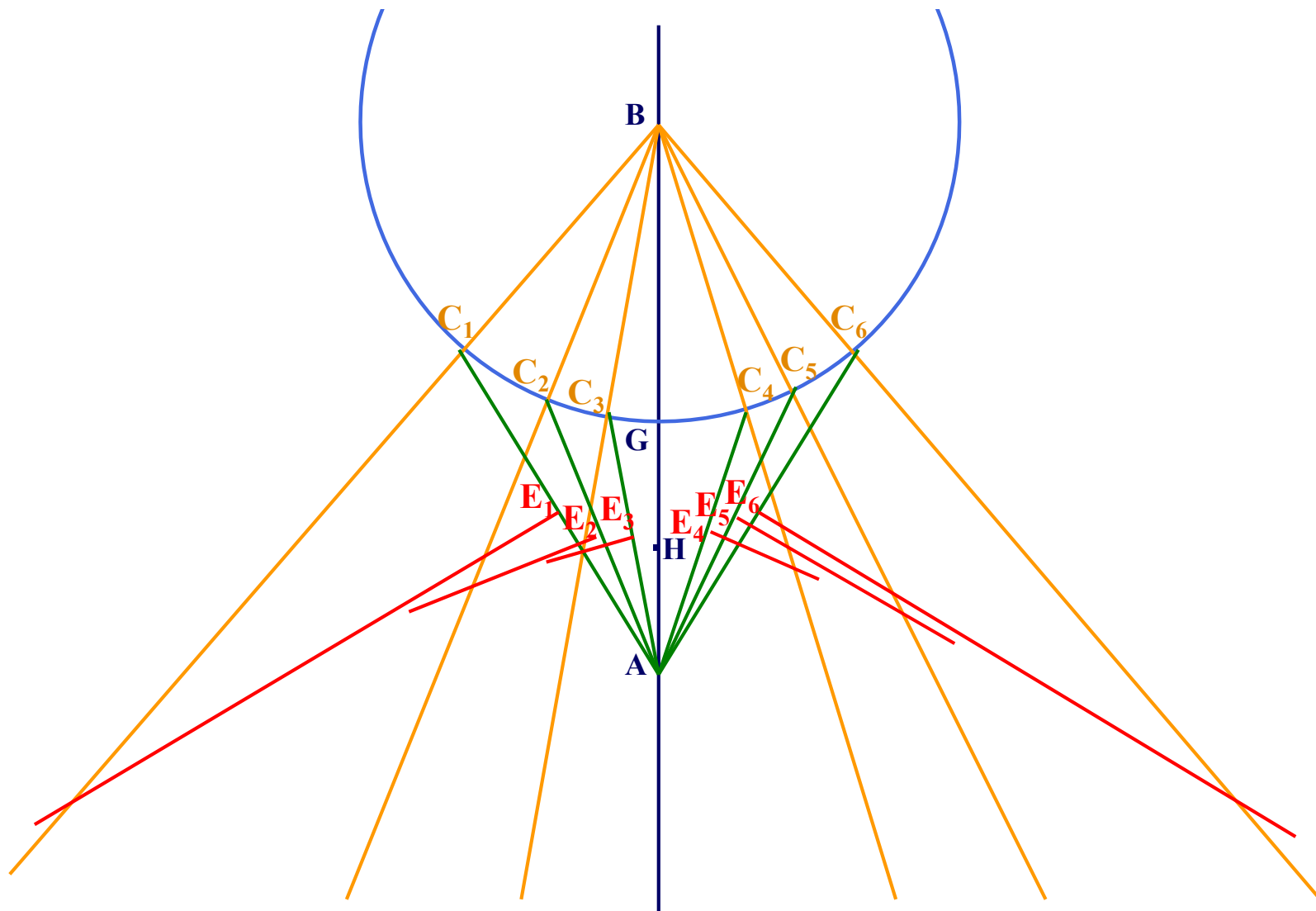
Dal punto A si traccino le rette AC_i e, tra esse, si considerino solo quelle che nei triangoli ABC_i formano l'angolo C_i ottuso.



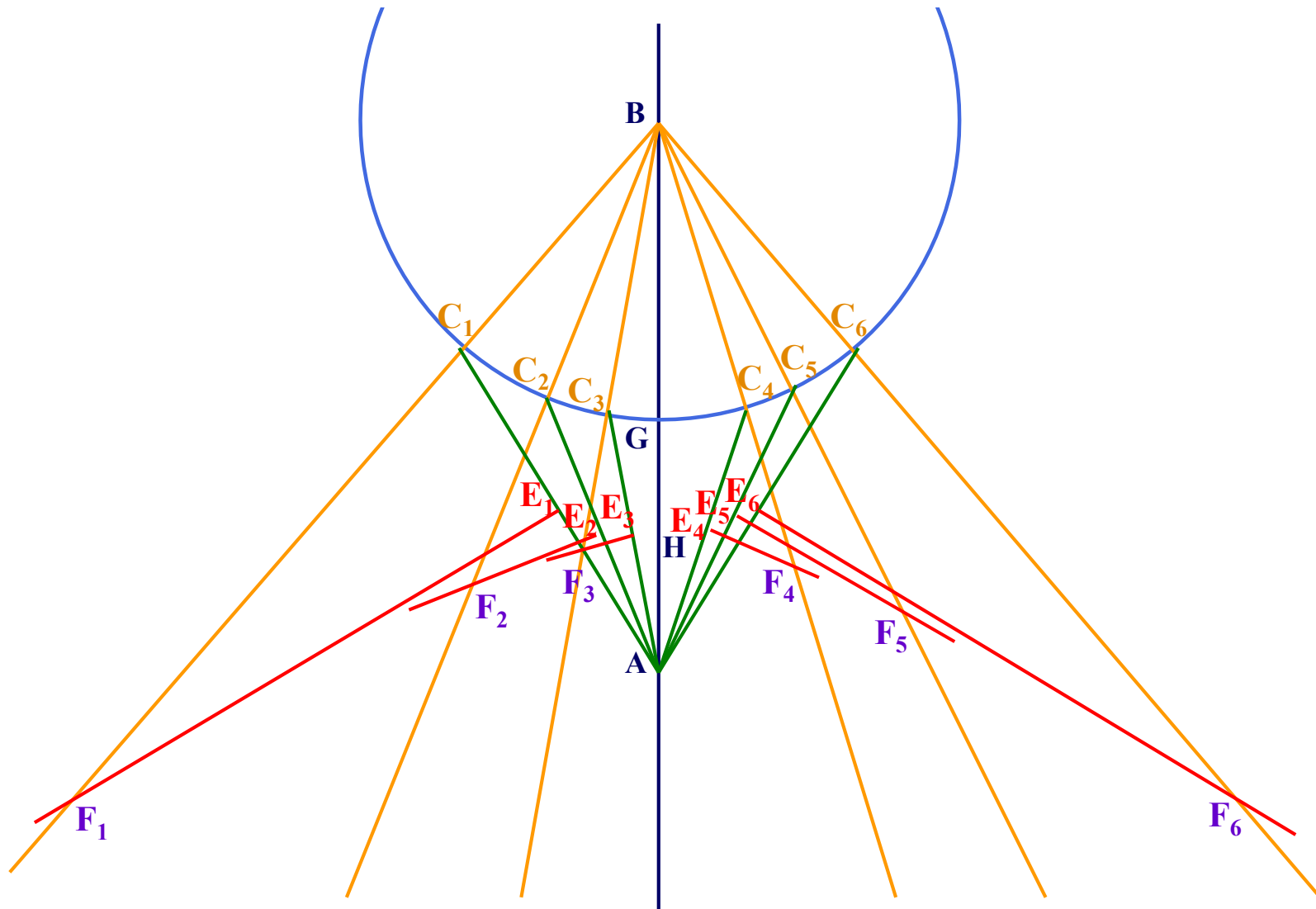
Siano E_i i punti medi di AC_i .



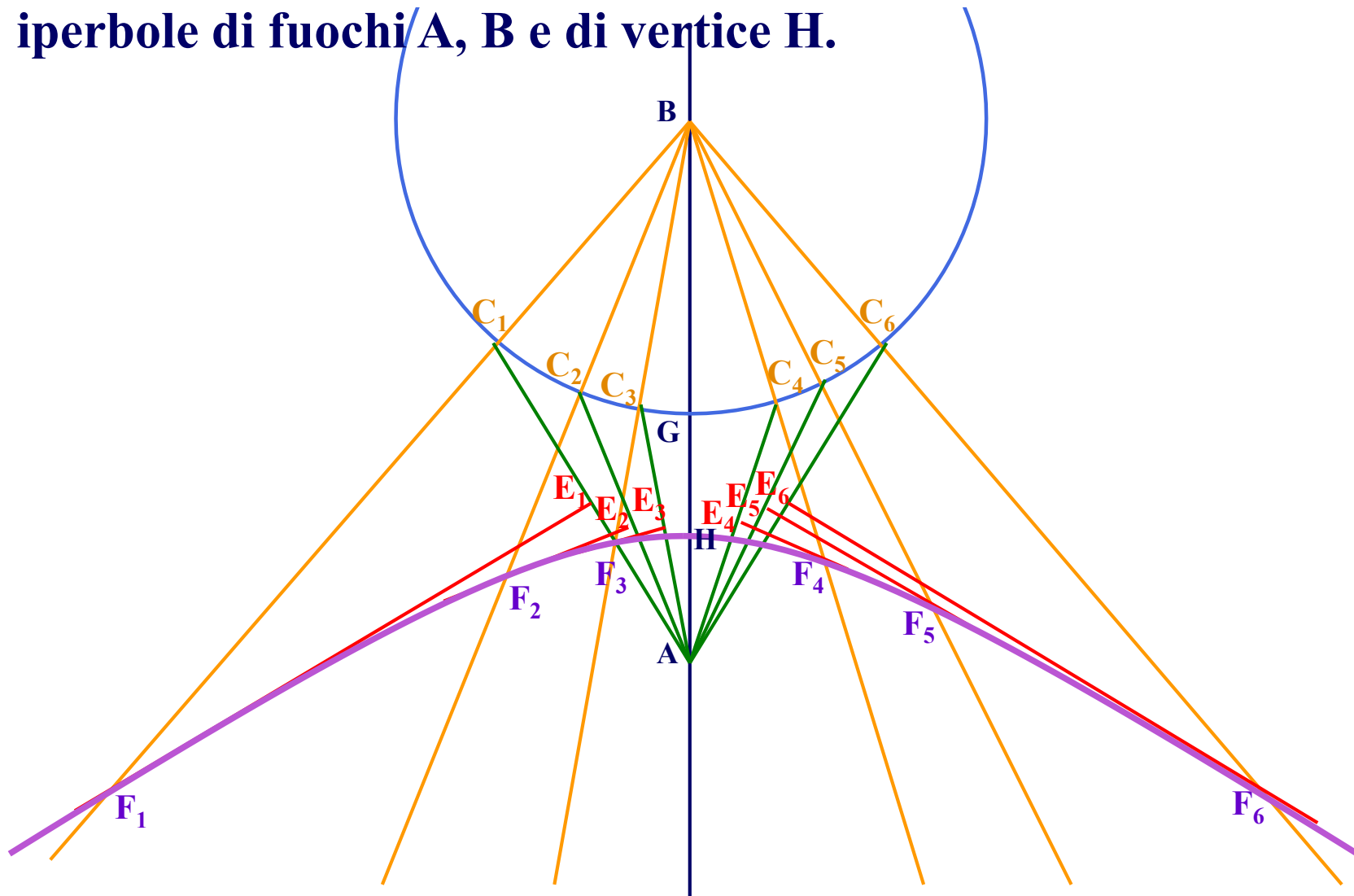
Dai punti E_i si traccino le perpendicolari alle rette AC_i :



Ognuna di queste perpendicolari interseca la corrispondente BC_i nel punto F_i .



Poiché nel triangolo ABC_i l'angolo C_i è ottuso, per la seconda proposizione preliminare i punti F_i si trovano su una stessa iperbole di fuochi A, B e di vertice H .



ELLISSE

**Dati per posizione i fuochi ed uno dei vertici di una ellisse,
descrivere nello stesso piano l'ellisse per punti**

Siano A e B i fuochi e H uno dei vertici di una ellisse.

B •

A •

• **H**

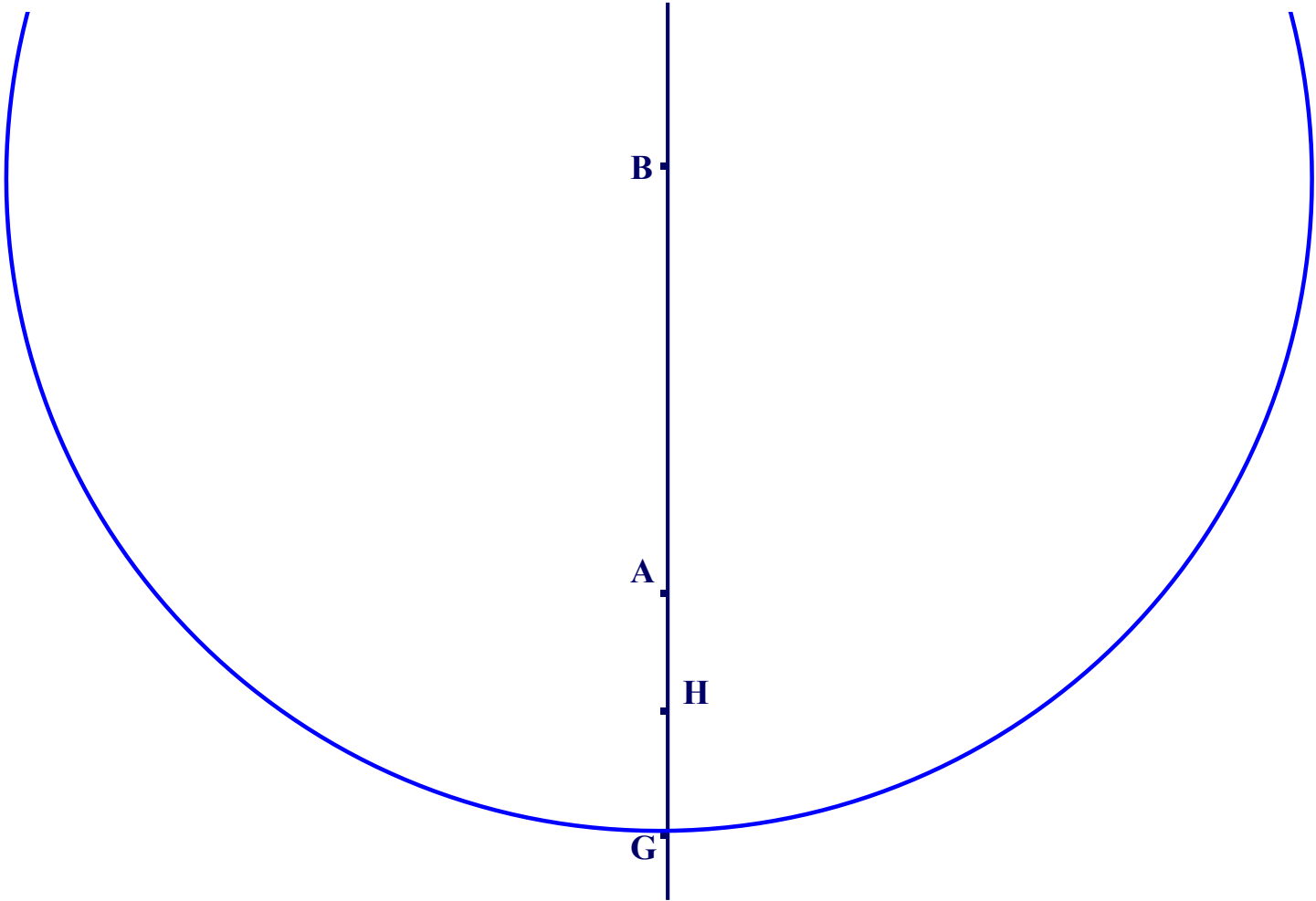
H si trova sul prolungamento di BA.



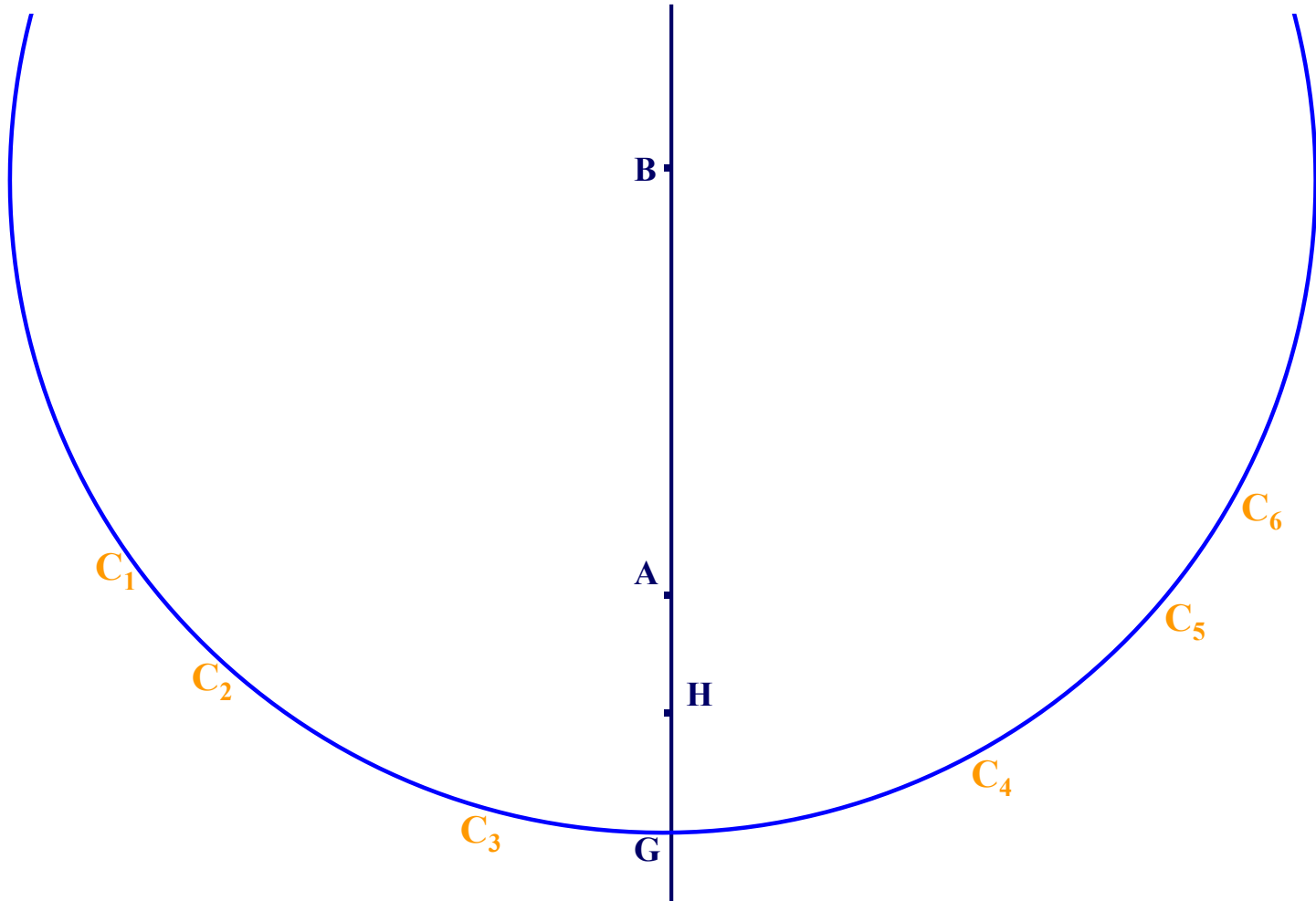
Su tale prolungamento si prenda $HG=AH$.



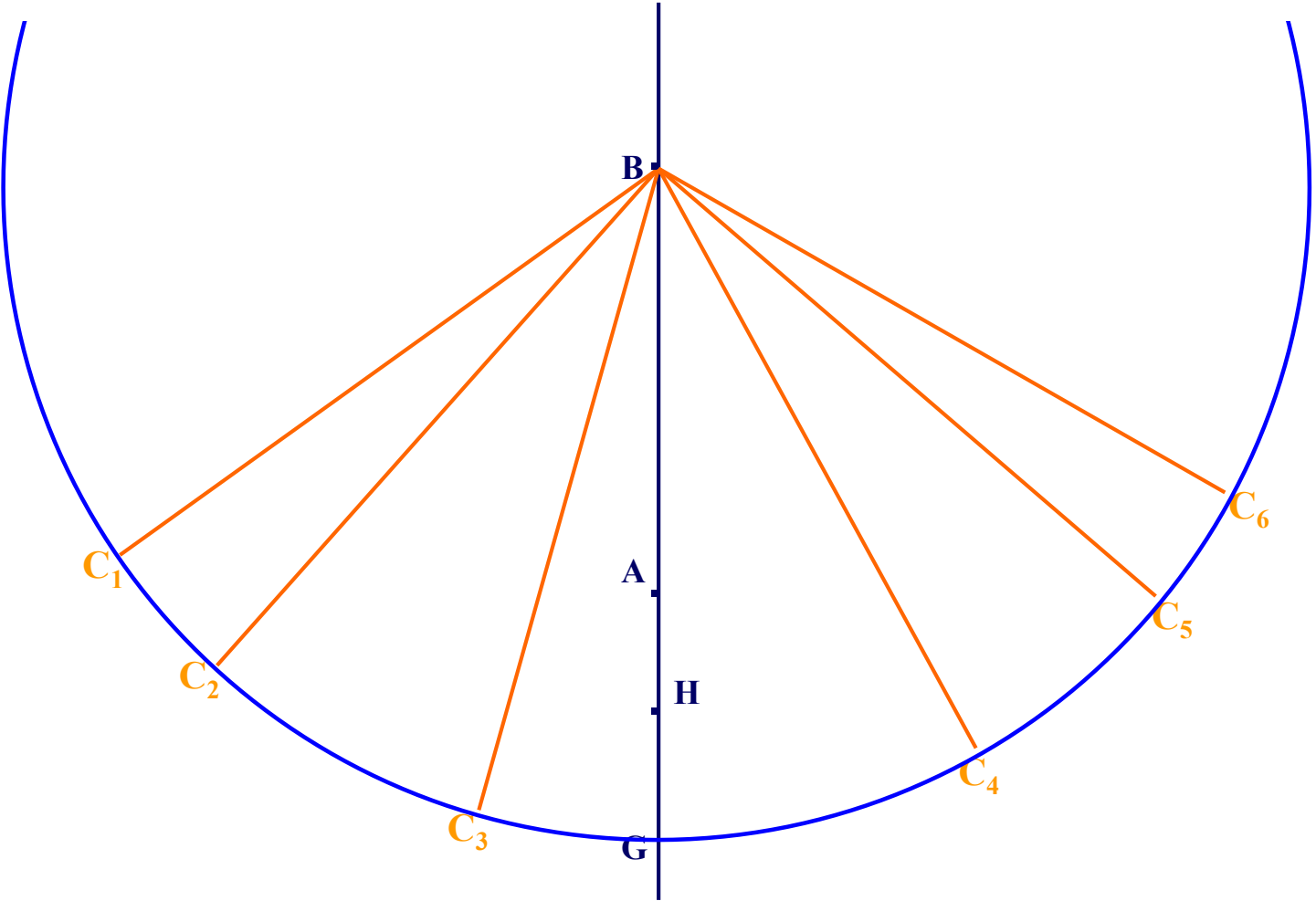
Si tracci un arco di circonferenza o l'intera circonferenza di centro B e raggio BG.



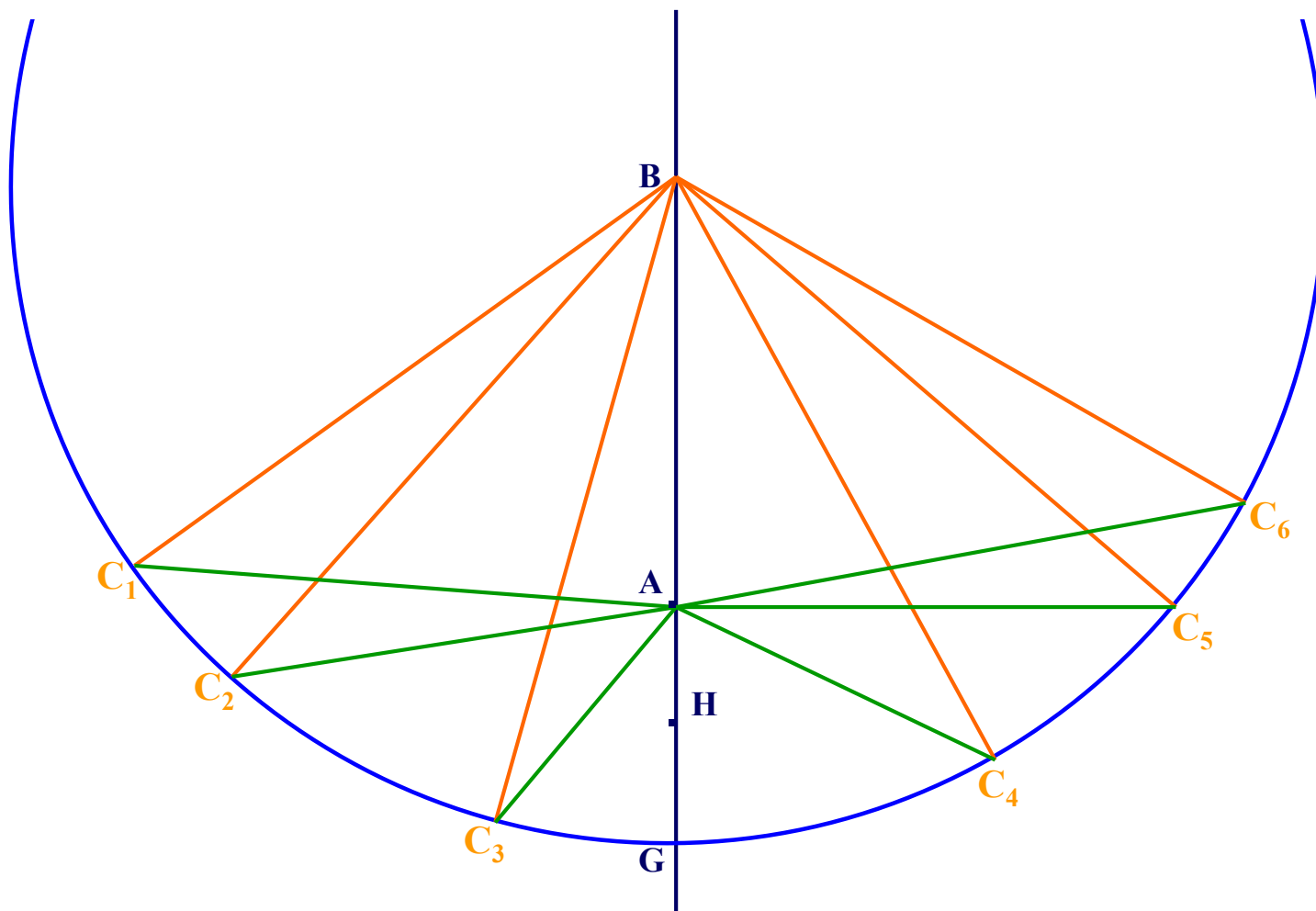
Su tale circonferenza si scelgano un certo numero di punti C_i .



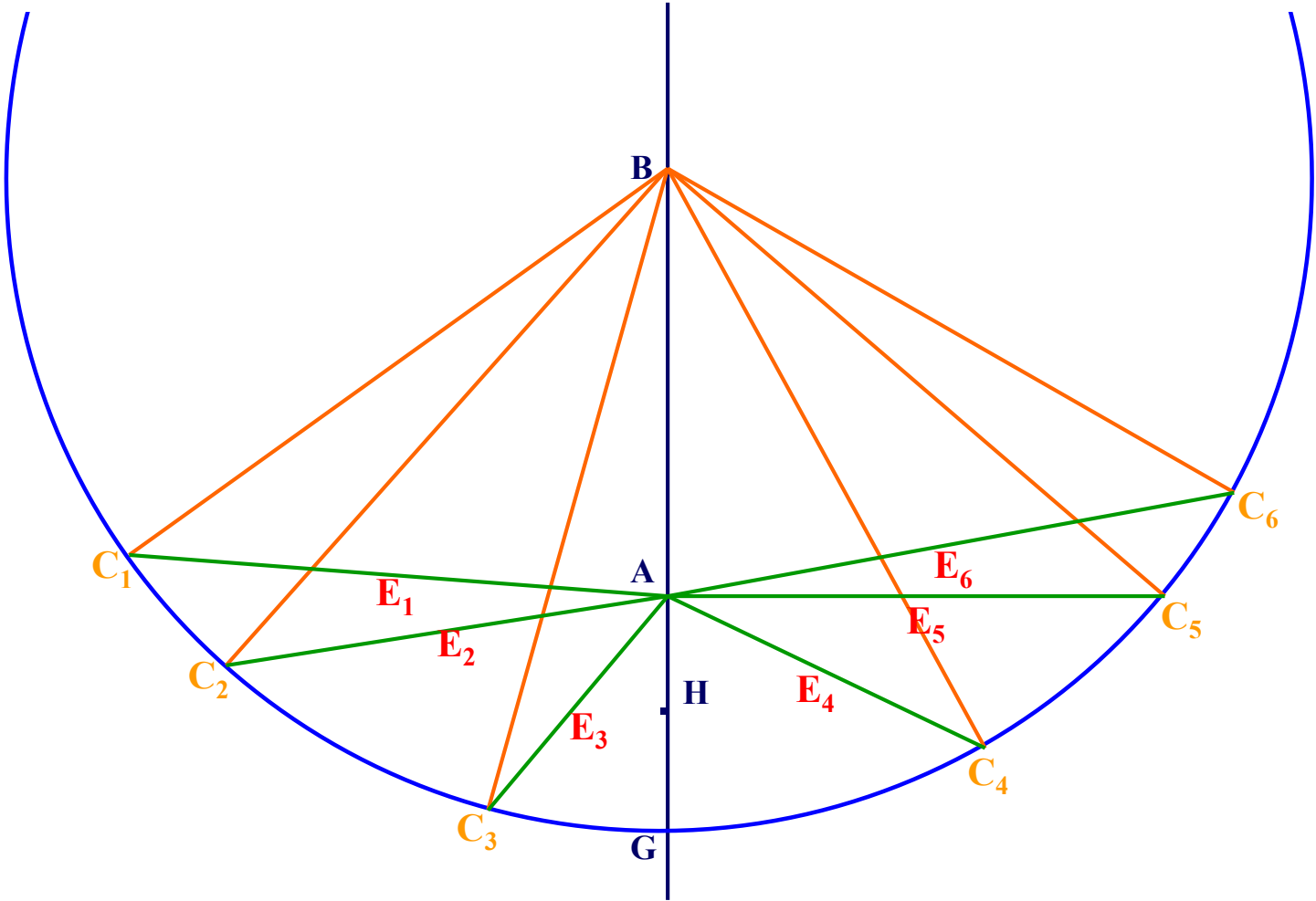
Si traccino le rette BC_i .



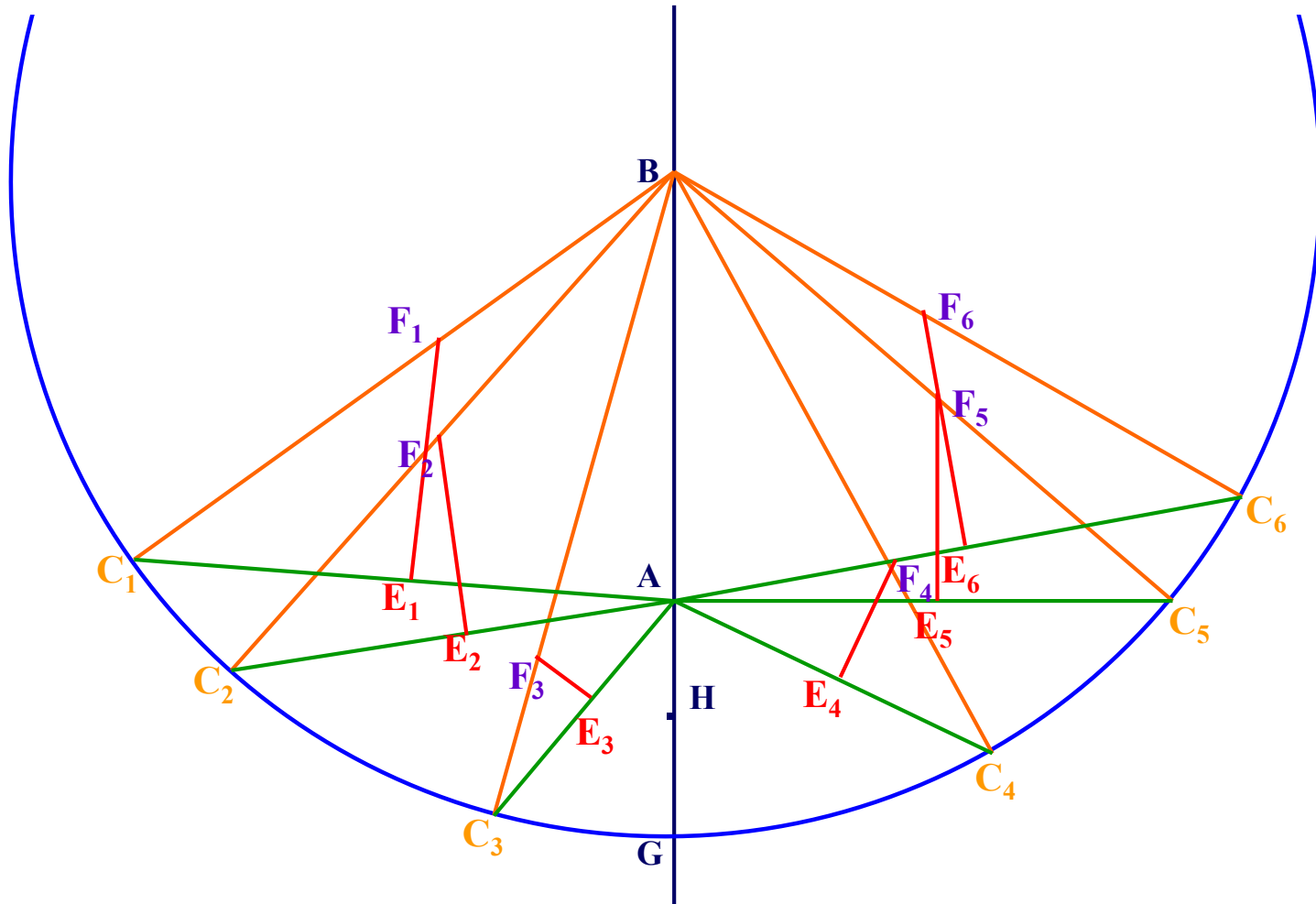
Si traccino le rette AC_i e, tra esse, si considerino solo quelle che nei triangoli ABC_i formano l'angolo C_i acuto.



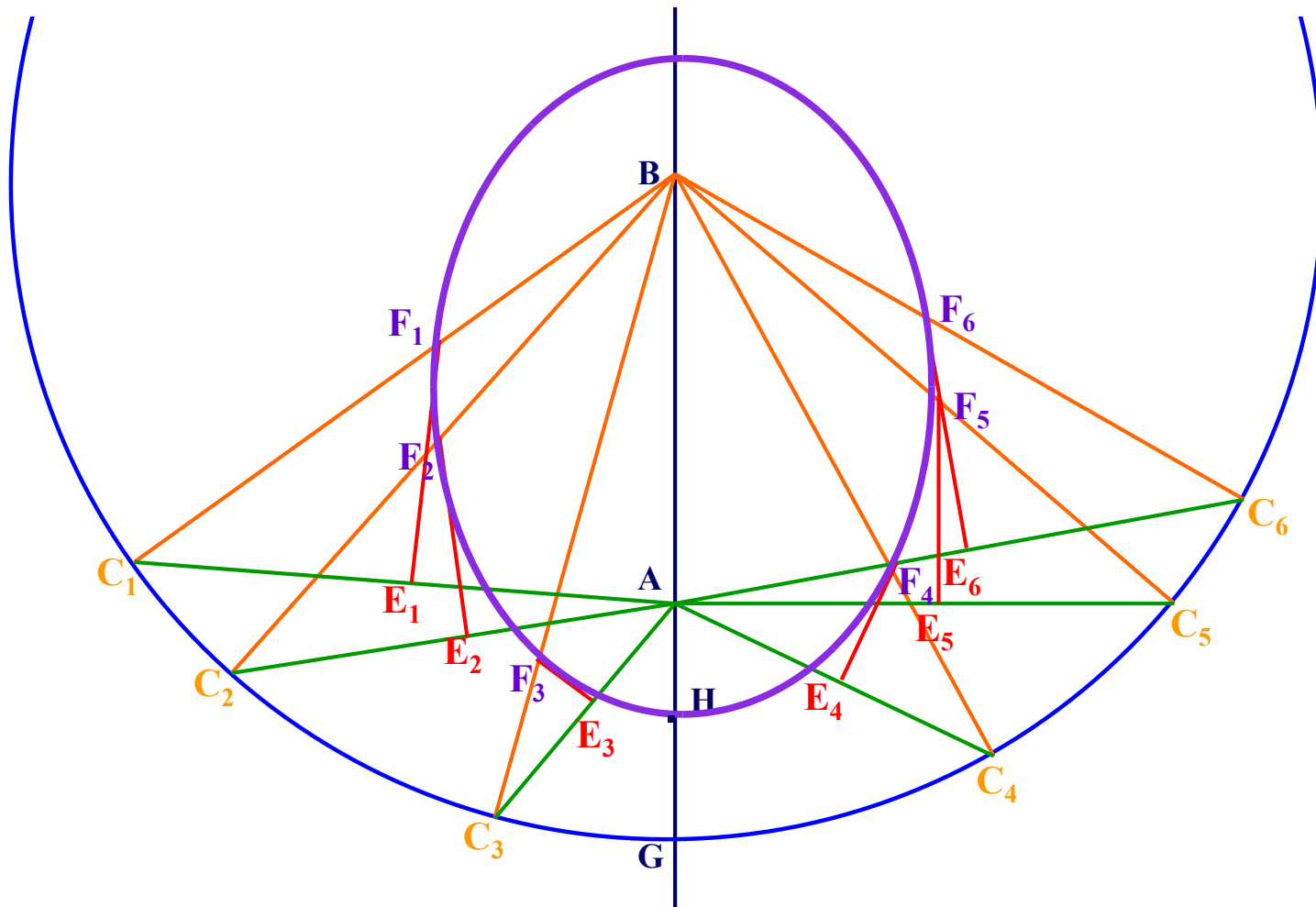
Siano E_i i punti medi di AC_i .



Dai punti E_i si traccino le rette E_iF_i perpendicolari alle AC_i : i punti F_i sono i punti di intersezione tra le rette E_iF_i e le corrispondenti BC_i .



Per la seconda proposizione preliminare, i punti F_i si trovano su una stessa ellisse di fuochi A , B e di vertice H .



Le origini dell'algebra

Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

Kitāb al-jabr wa al-muqābala (813 - 830 d.C.) (*Libro di algebra e di al-muqābala*)

Comparsa del termine “algebra” nel contesto di questioni matematiche

Prima parte

Equazioni, calcolo algebrico, soluzioni di problemi per mezzo delle equazioni, applicazione delle equazioni alla soluzione di problemi geometrici

Seconda parte *Il libro dei testamenti*

Problemi di eredità e di testamenti espressi secondo il diritto islamico

Le equazioni vengono usate per risolvere problemi giuridici.

Al-Khwārizmī divide le equazioni di secondo grado in “semplici” e “combinare”

Le equazioni semplici:

1) i quadrati sono uguali a radici $ax^2 = bx$

2) i quadrati sono uguali a un numero $ax^2 = c$

3) le radici sono uguali a un numero $bx = c$

Le equazioni combinate

1) i quadrati più le radici sono uguali a un numero $ax^2 + bx = c$

2) i quadrati più un numero sono uguali alle radici $ax^2 + c = bx$

3) le radici più un numero sono uguali ai quadrati $bx + c = ax^2$

Fino al Cinquecento, l'algebra e la geometria camminano fianco a fianco, anche se la geometria continua a esercitare il suo primato sull'algebra.

“algebra classica” o “algebra degli antichi” o “algebra numerica o numerosa”

Dal momento in cui si iniziano a tradurre i libri di Diofanto (250 d.C) comincia a svilupparsi l'“algebra dei moderni” o “algebra speciosa” o “algebra simbolica”.

Si fa risalire l'inizio dell'algebra simbolica alla pubblicazione degli scritti matematici di François Viète (1591).

Nella seconda metà del Cinquecento si ripropone il problema di che cosa sia la verità, la certezza, ...

René Descartes (1596-1650)

Regole per la guida dell'intelligenza (1628)

Discorso sul metodo (1637)

Meteore

Diottrica

Geometria

La *Geometria* è divisa in tre libri:

il I libro tratta di problemi costruibili con riga e compasso

il II libro tratta della natura delle curve

il III libro tratta della costruzione di problemi solidi e lineari

I libro

Per risolvere un problema si deve procedere nel modo seguente:

considerarlo come già risolto

assegnare una lettera a ogni grandezza, sia a quelle note che a quelle incognite

senza fare differenza tra grandezze note e incognite, seguire un procedimento che consenta alla fine di esprimere una stessa quantità in due modi

Cambia radicalmente il concetto di soluzione

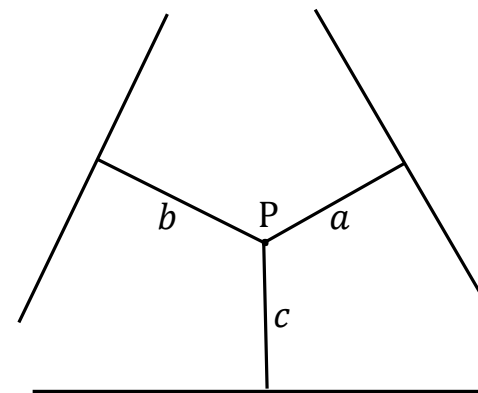
Nel 1637, in una lettera a Mersenne, replicava le critiche di un certo Beaugrand: “Nella Diottrica e nelle Meteore io ho cercato di persuadere che il mio metodo era il migliore; ho dimostrato ciò nella Geometria. Il modo in cui ho affrontato e risolto il problema di Pappo non trova riscontro nell’*Apollonius redivivus* di Ghetaldi, né nell’*Apollonius batavus* di Snell, e neanche nel *De maximis et minimis* di Fermat”.

Relativamente a un problema di Pappo, Cartesio fa quanto segue:

suppone di prendere tre rette di cui conosce la posizione

sceglie un punto qualunque P

dal punto P traccia delle rette a , b , c , che intersecano le rette precedenti sotto un certo angolo



Tra a , b e c esiste una delle seguenti relazioni:

$$a^2 = b \cdot c$$

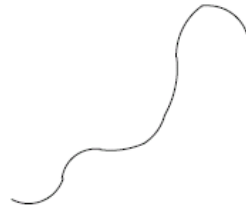
$$b^2 = a \cdot c$$

$$c^2 = a \cdot b$$

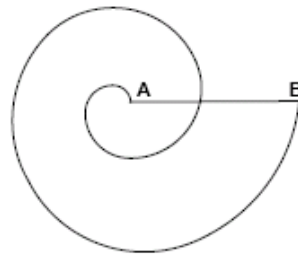
Il libro

Curve geometriche e meccaniche:

curve geometriche sono quelle descritte da un punto che si muove di moto continuo



curve meccaniche sono quelle descritte da un punto che si muove di moto composto



Data una curva, a essa si può far corrispondere un'equazione

«genere» di una curva

genere 0: curve che hanno un'equazione di primo grado, cioè rette

genere 1: curve che hanno un'equazione di secondo grado

genere 2: curve che hanno un'equazione di terzo e quarto grado

genere 3: curve che hanno un'equazione di quinto e sesto grado

Fermat critica questa classificazione

curve speciali

estensione del metodo

III libro

Teorema fondamentale dell'algebra

Data l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, possiamo scriverla come $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, dove x_1 e x_2 sono le radici distinte

Relazione tra le radici e i coefficienti dell'equazione

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Regola dei segni

$a > 0$	b	c			<i>segno delle radici</i>
+	+	+	P	P	2 negative
+	+	-	P	V	1 negativa, 1 positiva
+	-	+	V	V	2 positive
+	-	-	V	P	1 positiva, 1 negativa

Bonaventura Cavalieri

Geometria degli indivisibili (1635)

Esercitazioni geometriche (1647)

Lo specchio ustorio (1632)

Teoria degli “indivisibili”

Considera le grandezze geometriche come costituite da un numero infinito di parti che sono i termini ultimi della scomposizione che si può eseguire e, pertanto, vengono dette “indivisibili”.

Le misure delle si riducono a eseguire la somma di infiniti indivisibili.

Evangelista Torricelli

Le opere geometriche (1644)

Riprende il metodo di esaustione e usa il metodo degli indivisibili

Pappo di Alessandria

Vive ad Alessandria tra il III e IV secolo d. C.

Collezioni matematiche in 8 libri

Prima pagina del settimo libro:

“L’*analisi* è ... la *via* che parte dalla cosa cercata, considerata come già concessa, per pervenire, attraverso le conseguenze che ne derivano, alla *sintesi* di ciò che è stato concesso.

In effetti, supponendo nell’*analisi* che la cosa cercata è ottenuta, si considera ciò che deriva da questa cosa e ciò da cui procede, fino a che, ritornando sui propri passi, si perviene ad una cosa già conosciuta o che rientra nell’ordine dei principi; *si chiama analisi questo modo di procedere o via, in quanto costituisce una inversione della soluzione.*

Al contrario, nella *sintesi*, supponendo la cosa finalmente colta per mezzo dell’*analisi* come già ottenuta e disponendo, quindi, delle sue conseguenze e delle sue cause nel loro ordine naturale, dopo, mettendo insieme le une e le altre, si ottiene infine il risultato di *costruire la cosa cercata; questo è ciò che noi chiamiamo sintesi*”.

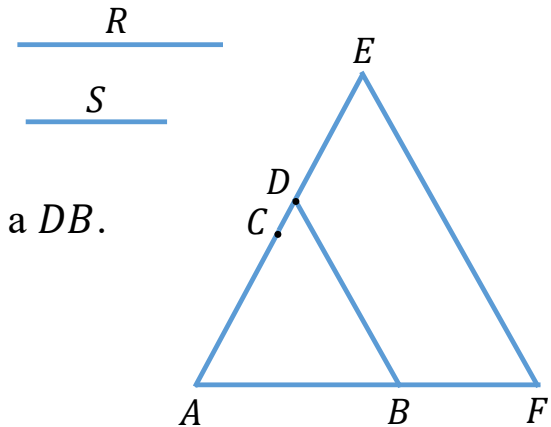
Marino Ghetaldi

De resolutione et compositione mathematica (1630)

Problema III:

Data una retta, sommare a essa un'altra retta, in modo che la differenza della retta data e di quella sommata e la somma delle medesime sia un rapporto dato. Si vuole che il rapporto dato sia dal minore al maggiore.

<i>Inizio dell'Analisi</i>	<i>Fine della Sintesi</i>
$(R - S) : (R + S) = P : Q$	$P : Q = (R - S) : (R + S)$ $CD : AC = (AB - BF) : (AB + BF)$
$Q \cdot (R - S) = P \cdot (R + S)$ $QR - QS = PR + PS$	$CD \cdot (AB + BF) = AC \cdot (AB - BF)$
$QR = PR + PS + QS$	$CD \cdot BF + CD \cdot AB = AC \cdot AB - AC \cdot BF$
$QR - PR = PS + QS$ $R \cdot (Q - P) = S \cdot (Q + P)$	$AC \cdot BF + CD \cdot BF + CD \cdot AB = AC \cdot AB$
$(Q + P) : (Q - P) = R : S$	$AC \cdot BF + CD \cdot BF = AC \cdot AB - CD \cdot AB$ $(AC + CD) \cdot BF = (AC - CD) \cdot AB$ $(AC + CD) : (CE - CD) = AB : BF$ $AD : DE = AB : BF$ Si congiunga D con B e da E si tracci EF parallela a DB . Si ponga $CD = P$. Si prolunghi AC in modo che $AC = CE$. Si ponga $Q = AC$. Sia data la retta $AB = R$.
<i>Fine dell'Analisi</i>	<i>Inizio della Sintesi</i>



Geometria proiettiva

Ambrogio Lorenzetti

Annunciazione 1344

Le immagini delle rette che sono parallele fra loro nella scena reale e ortogonali al quadro convergono in un punto (che sarà chiamato “punto di fuga”)

Cennino Cennini

Filippo Brunelleschi

Donatello

Masaccio

Paolo Uccello

Mantegna

.....

Alcuni pittori decidono di scrivere libri
sulla geometria che serve ai pittori

Leon Battista Alberti

Pier della Francesca

Leonardo da Vinci

Albrecht Dürer

Guido Ubaldo Del Monte

.....

Pier della Francesca

De perspectiva pingendi (1475)

Il metodo costruttivo e dimostrativo della geometria è usato per la prospettiva

Guido Ubaldo Del Monte

Perspectiva libri sex (1600)

“Legge del punto di fuga”

Girard Desargues (1593-1662)

Trattato sulle coniche avente per titolo: Progetto in brutta copia su ciò che succede nell'intersezione fra un cono e un piano (1639)

Brouillon Projet

Traduce la prospettiva nel linguaggio della geometria

Si passa dalla prospettiva dei pittori alla geometria proiettiva, in cui i punti di fuga sono i punti all'infinito

Quasi subito non si ha traccia delle copie stampate

Si trova una annotazione su di esso, risalente al 1679, da parte di Philippe La Hire

Desargues prende spunto dalla matematica dei pittori e inventa un nuovo linguaggio

Usa termini come “nodo”, “tronco”, “ramo”, per indicare oggetti geometrici come punto su una retta, una retta, rette che si intersecano

Coniche come “trasformazioni” visive (proiettive) di una circonferenza da una semisfera su un piano

Considera la retta infinita, il segmento formato da infiniti punti

Emerge la differenza tra essere limitato ed essere composto da infiniti punti

Troviamo bene espressa la differenza tra fasci di rette propri e impropri

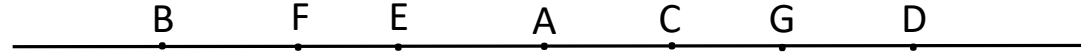
tra fasci di piani propri e impropri

Primo postulato della geometria proiettiva

Due rette in uno stesso piano hanno sempre un punto comune

Fissiamo un punto A su una retta

Consideriamo su di essa un certo numero di punti:



e le coppie di segmenti: (AB, AC) (AD, AE) (AF, AG)

Se $AB \cdot AC = AD \cdot AE = AF \cdot AG = \text{costante}$, allora:

le tre coppie di segmenti costituiscono un “albero”

la retta BD è il “tronco dell’albero”

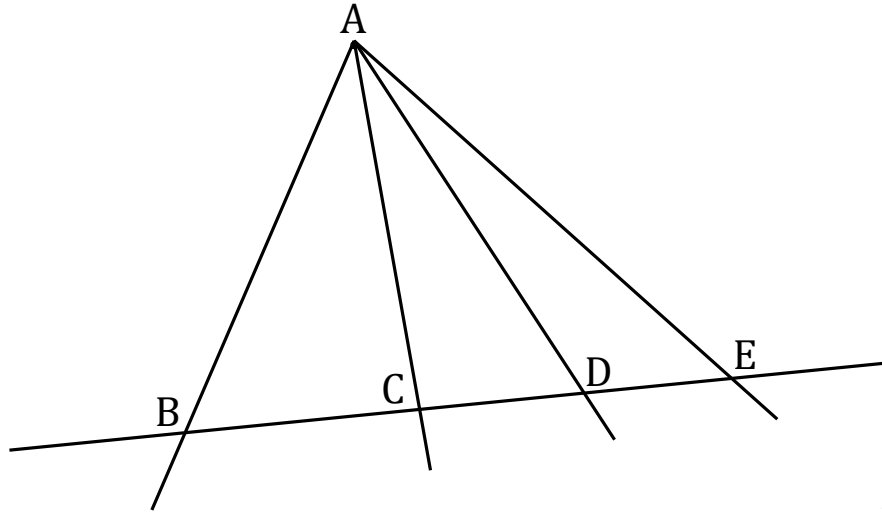
il punto A è il “ceppo dell’albero” (origine)

ciascuno dei segmenti è un “braccio” o “ramo”

ciascun punto è un “nodo”

i sei punti B, C, D, E, F, G sono in “involuzione”

Se poniamo l'origine fuori dalla retta arriviamo al concetto di involuzione attuale.



I punti B, C, D, E sono in involuzione se

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

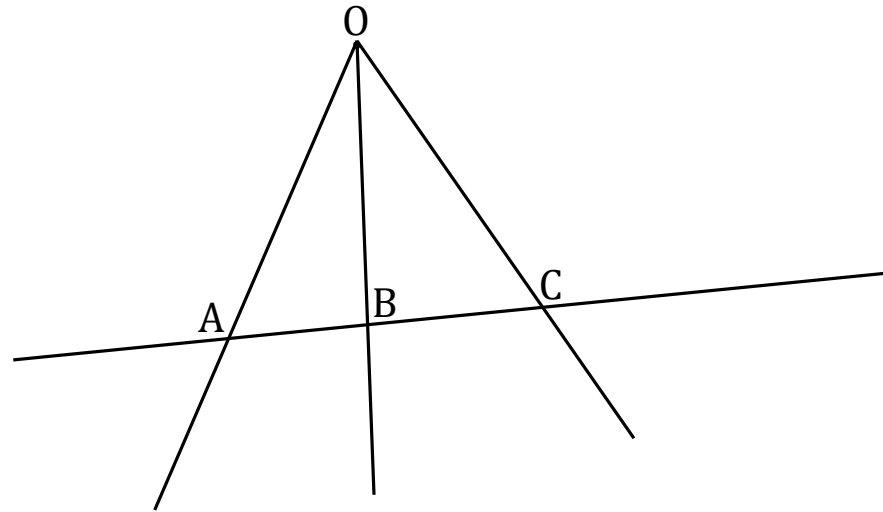
Il punto A è il centro dell'involuzione

(B, C) e (D, E) sono due coppie di punti coniugati o corrispondenti

Il prodotto costante (per ogni coppia di punti coniugati) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$
è detto “potenza o modulo” dell'involuzione

Immaginiamo di avere una sorgente luminosa in un punto O

Consideriamo 3 raggi che tagliamo con una retta individuando i punti A, B, C .



A, B, C sono legati da una proiezione e in un *rapporto semplice*:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}$$

Consideriamo 4 raggi, che tagliamo con una retta individuando i punti A, B, C, D .

A, B, C, D sono legati da una proiezione e in un *birapporto*:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

$$(A'B'C'D') = \frac{A'C'}{A'D'} \cdot \frac{B'D'}{B'C'}$$

In particolare,

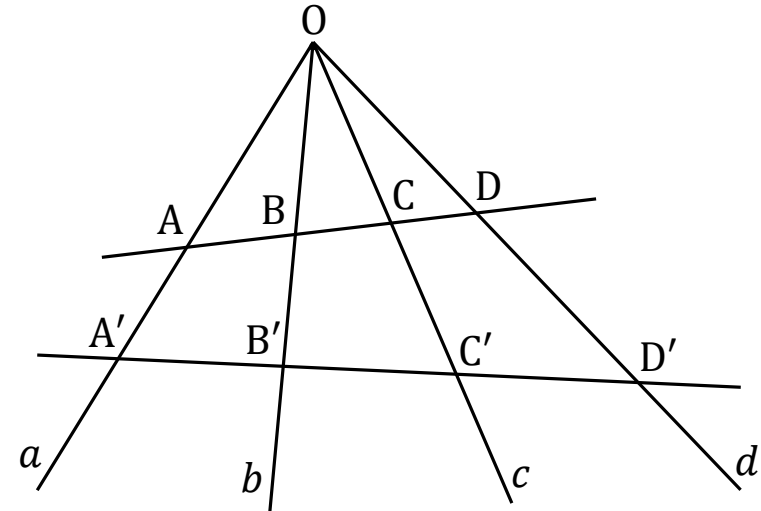
se $(ABCD) = 1$, A, B, C, D sono in *involutione*, cioè $AC \cdot BD = AD \cdot BC$

se $(ABCD) = -1$, A, B, C, D costituiscono un *gruppo armonico*

Alcune proprietà del birapporto

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$



Teorema di Menelao-Tolomeo

Consideriamo quattro rette (in modo tale che, a due a due, abbiano un punto in comune).

Sulla prima retta individuiamo i punti H, D, G ; sulla seconda i punti H, K, h ;

sulla terza G, q, K ; sulla quarta D, q, h .

Il teorema di Menelao-Tolomeo afferma che
$$\frac{Dh}{Dq} = \frac{Hh}{HK} \cdot \frac{GK}{Gq}$$

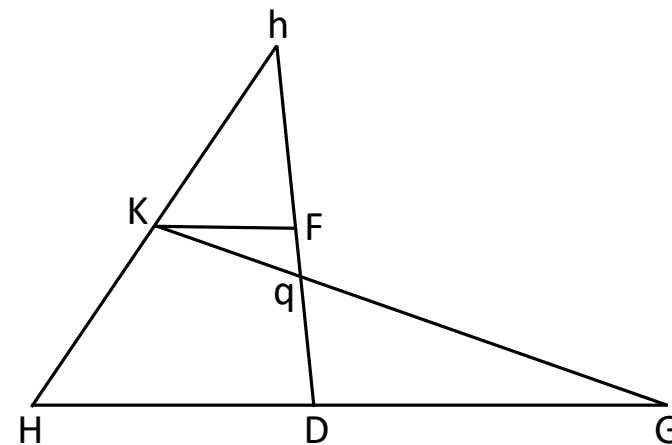
Da K tracciamo la parallela a HD e individuiamo il punto F .

I triangoli DGq e KFq sono simili, quindi: $Dq : Fq = Gq : Kq$.

Per la proprietà del comporre si ha: $(Dq + qF) : Dq = (Gq + qK) : Gq$

$$DF : Dq = GK : Gq$$

$$DF = \frac{GK \cdot Dq}{Gq}$$



I triangoli HDh e KFh sono simili: $Hh : Kh = Dh : Fh$

Per la proprietà dello scomporre, $(Hh - Kh) : Hh = (Dh - Fh) : Dh$

$$HK : Hh = DF : Dh$$

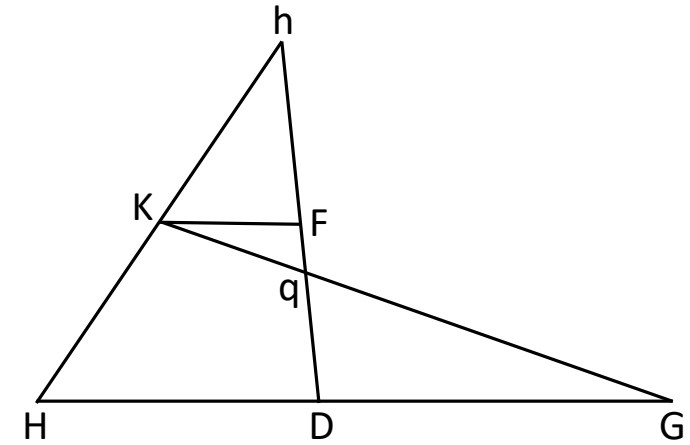
$$DF = \frac{HK \cdot Dh}{Hh}$$

Confrontando le due espressioni di DF si può scrivere:

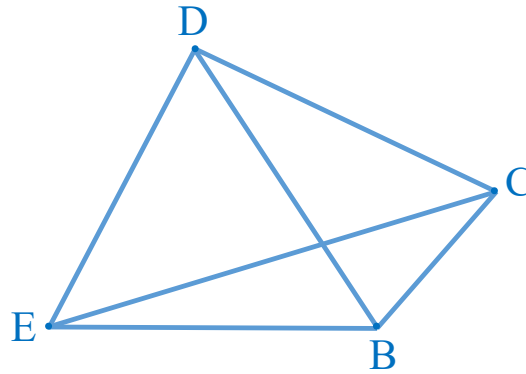
$$\frac{GK \cdot Dq}{Gq} = \frac{HK \cdot Dh}{Hh}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{Gq}{GK \cdot Dh}$ si ottiene: $\frac{Dq}{Dh} = \frac{HK}{Hh} \cdot \frac{Gq}{GK}$

Invertendo, si ha: $\frac{Dh}{Dq} = \frac{Hh}{HK} \cdot \frac{GK}{Gq}$

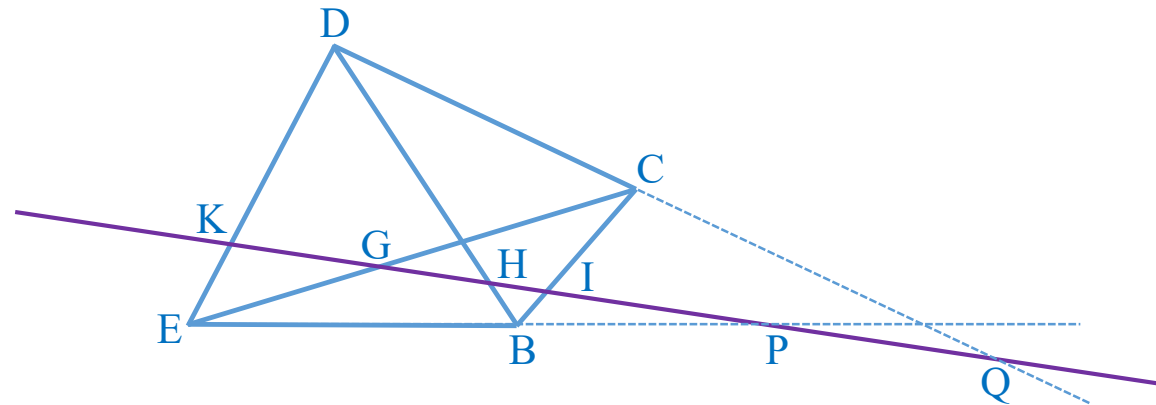


Quadrilatero piano completo.



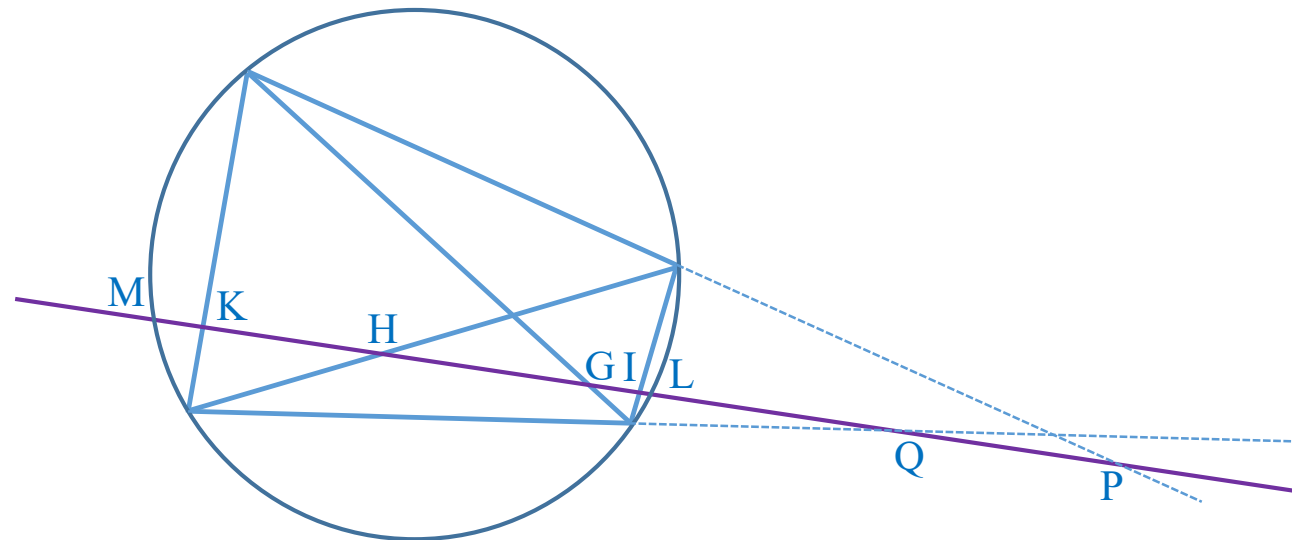
Teorema (fondamentale)

Se le tre coppie di lati opposti di un quadrilatero piano completo sono intersecate da una retta che non passa per i vertici del quadrilatero, allora i sei punti individuati sono in involuzione.

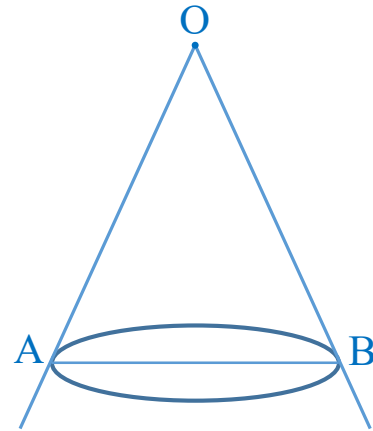


Teorema

Dato un quadrilatero piano completo inscritto in una conica, una retta secante non passante per alcun vertice del quadrilatero, taglia la conica in due punti (M, L) che sono “accoppiati” nell’involuzione a cui appartengono le tre coppie di punti segnati sulla stessa retta dalle coppie di lati opposti del quadrilatero.



Costruzione della *polare* a una conica.



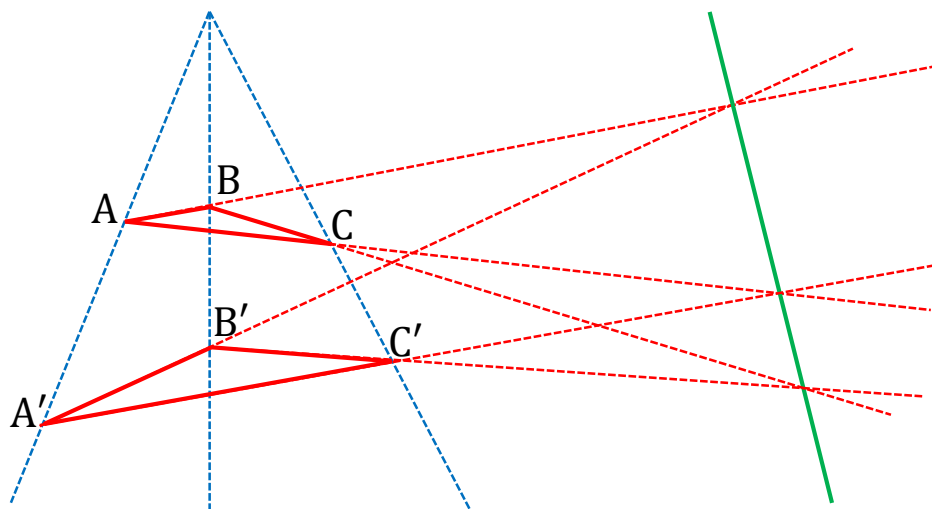
Consideriamo una conica e un punto O esterno a essa.

Dal punto O si possono tracciare le due rette OA e OB tangenti alla conica in A e in B .

Il punto O è detto *polo*; la retta AB è detta *polare*.

Teorema di Desargues

Se le tre coppie di vertici corrispondenti di due triangoli si intersecano in un punto, allora le tre coppie di lati corrispondenti si intersecano in tre punti di una stessa retta.



“Teorema duale”:

Se le tre coppie di lati corrispondenti di due triangoli si intersecano a due a due in punti di una stessa retta, allora le tre coppie di vertici corrispondenti si intersecano in un punto O .

I triangoli si chiamano *prospettivi* rispetto al punto O e alle tre rette o anche *omologici*.

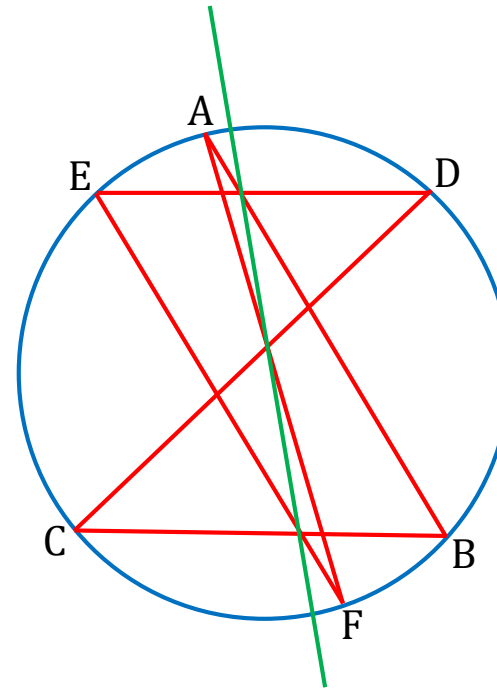
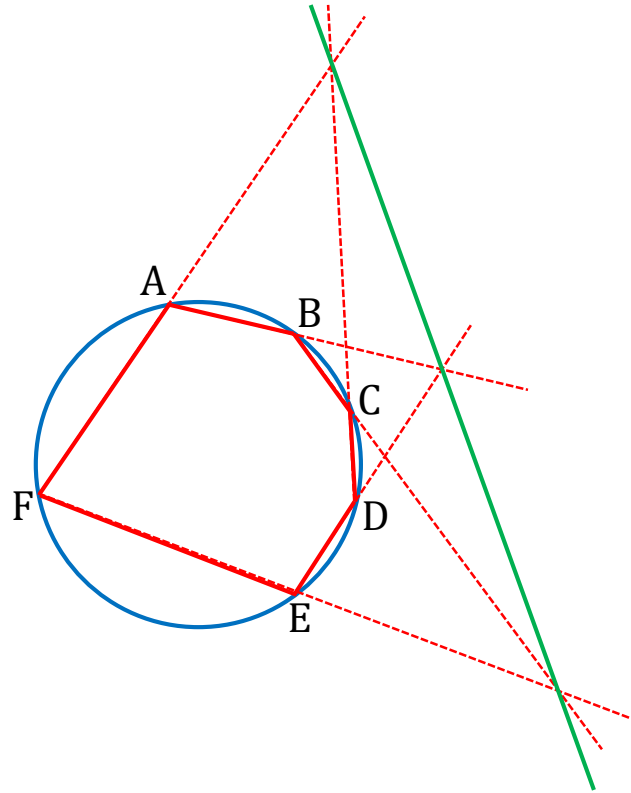
Blaise Pascal (1623-1662)

Essai sur le coniques 1640

Traité des coniques 1644-1656

Teorema dell'*esagono semplice*:

Se un esagono semplice è inscritto in una conica, le tre coppie di lati opposti si tagliano in tre punti di una stessa retta.



Teorema

Se in un esagono semplice le coppie di lati opposti si tagliano in tre punti di una stessa retta, i vertici dell'esagono giacciono sopra una stessa conica.

Nel 1806, **C.G. Brianchon** enuncia il teorema corrispondente di quello di Pascal per un esagono circoscritto a una conica:

Teorema

Se un esagono semplice è circoscritto a una conica, allora le tre rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto

Teorema (duale)

Se in un esagono semplice le congiungenti le coppie di vertici opposti passano per un punto, i lati dell'esagono sono tangenti a una medesima conica

G.V. Poncelet

Trattato delle proprietà proiettive delle figure (1822)

Alcune proposizioni:

Tutte le rette parallele concorrono in un unico punto all'infinito

Tutti i punti all'infinito di un piano possono essere considerati idealmente come distribuiti su di una retta unica situata essa stessa all'infinito su questo piano

Tutti punti all'infinito dello spazio possono essere pensati appartenenti ad un solo e medesimo piano, necessariamente indeterminato per posizione

Chr. Von Staudt

Geometria di posizione (1847)

Principio di Dualità

Data una proposizione, esiste la duale che si ottiene scambiando alcuni termini